

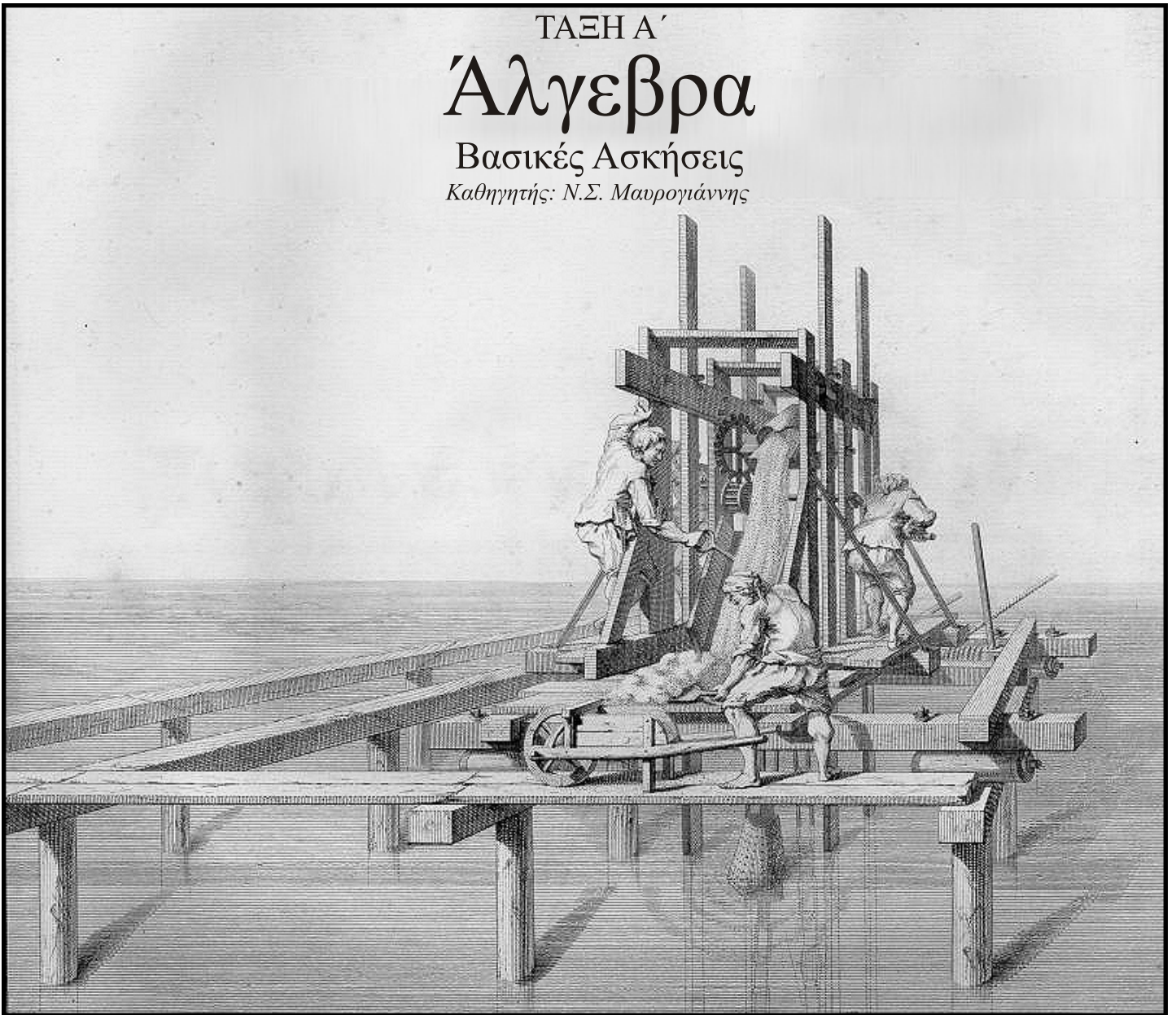
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

ΤΑΞΗ Α΄
Άλγεβρα
Βασικές Ασκήσεις
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης



Σχολικό Έτος 2009-2010

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΠΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΤΑΞΗ Α, ΑΛΓΕΒΡΑ, ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Οι σημειώσεις αυτές είναι για σχολική χρήση. Μπορούν να αναπαραχθούν και να διανεμηθούν ελεύθερα αρκεί να μην αλλάξει η μορφή τους. Για τον περιορισμό, των αναπόφευκτων, λαθών υπόκειται σε συνεχείς διορθώσεις. Διανέμονται ως έχουν και ο συντάκτης τους δεν φέρει καμία ευθύνη για τυχόν προβλήματα που ανακύψουν από την χρήση τους.

6 Οκτωβρίου 2009

Στοιχειοθετήθηκαν με το L^AT_EX.

1 Οι τέσσερις πράξεις στο \mathbb{R}

1. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί

$$(\alpha') x(y+z-t)$$

$$(\gamma') (x\alpha)(y+z-t)$$

$$(\beta') (x+\alpha)(y+z-t)$$

$$(\delta') (\alpha+\beta-\gamma)(\kappa-\lambda+\mu)$$

Απάντηση:

$$(\alpha') xy+xz-xt$$

$$(\delta') \alpha\kappa - \alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\kappa - \beta\lambda + \beta\mu - \gamma\kappa + \gamma\lambda - \gamma\mu$$

$$(\beta') xy+xz-xt+\alpha y+\alpha z-\alpha t$$

$$(\gamma') x\alpha y+x\alpha z-x\alpha t$$

2. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

$$(\alpha') \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$(\gamma') \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$(\beta') \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$(\delta') \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y-2}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{13}{12}$$

$$(\gamma') \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$(\beta') \frac{5}{12}$$

$$(\delta') \frac{y-x-3}{(x+1)(y-2)}$$

3. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{xy+1}{x+y}$. Να βρείτε την τιμή της A όταν

$$(\alpha') x = 1, y = 2$$

$$(\beta') x = -\frac{1}{4}, y = 8$$

Απάντηση:

$$(\alpha') 1$$

$$(\beta') -\frac{4}{31}$$

4. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

$$(\alpha') \frac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{y}}$$

$$(\gamma') \frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{\alpha}{y}}$$

$$(\beta') \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{x}{y}}$$

$$(\delta') \frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{x}{y}}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{14}{15}$$

$$(\beta') \frac{\alpha y}{\beta x}$$

$$(\gamma') \frac{\alpha y}{x}$$

$$(\delta') \frac{\alpha}{xy}$$

2 Δυνάμεις

5. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$(\alpha') 2^4$$

$$(\delta') 5^2$$

$$(\beta') 4^2$$

$$(\epsilon') 2^{-3}$$

$$(\gamma') 2^5$$

$$(\zeta') (-3)^2$$



Απάντηση:

$$(\alpha') 16$$

$$(\beta') 16$$

$$(\gamma') 32$$

$$(\delta') 25$$

$$(\epsilon') \frac{1}{8}$$

$$(\zeta') 9$$

6. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$(\alpha') \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(\beta') \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$(\gamma') \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(\delta') \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{16}{81}$$

$$(\beta') \frac{216}{125}$$

$$(\gamma') -\frac{8}{27}$$

$$(\delta') \frac{9}{25}$$

7. Να γράψετε ως μία δύναμη του α τους αριθμούς:

$$(\alpha') \alpha^3 \alpha^5$$

$$(\beta') \frac{\alpha^3}{\alpha^5}$$

$$(\gamma') (\alpha^2)^3$$

$$(\delta') (\alpha^2 \alpha^3 \alpha^4)^2 (\alpha^2 \alpha^3 \alpha^4)^3$$

$$(\epsilon') (\alpha^4)^{-3} \alpha^5 \frac{1}{(\alpha^{-3})^2}$$

$$(\zeta') \left((\alpha^{-3})^{-4} (\alpha^{-5})^{-6} \right)^2$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \alpha^8$$

$$(\beta') \alpha^{-2}$$

$$(\gamma') \alpha^6$$

$$(\delta') \alpha^{45}$$

$$(\epsilon') \alpha^{-1}$$

$$(\zeta') \alpha^{84}$$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha') 2^2 + 3^{-2} - (-3)^2$$

$$(\beta') 2^9 + (-2)^9 + 2^0$$

$$(\gamma') (-t)^{51} + t^{51} + (-t)^{-51} + t^{-51}$$

$$(\delta') \frac{\xi^2 + \xi}{\xi} - \xi - 1$$

Απάντηση:

$$(\alpha') -\frac{41}{9}$$

$$(\beta') 1$$

$$(\gamma') 0$$

$$(\delta') 0$$

3 Αναλογίες

9. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

τότε ισχύουν και οι:



(α') $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$

(γ') $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5\alpha+3\gamma}{5\beta+3\delta}$

(β') $\beta^2\gamma^2 = \alpha^2\delta^2$

(δ') $\frac{\alpha}{\alpha+2\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+2\delta}$

10. Να αποδείξετε ότι από κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις προκύπτει η $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (μην ασχοληθείτε με περιορισμούς):

(α') $ps - rq = 0$

(γ') $\frac{5p+3r}{5q+3s} = \frac{4p-7r}{4q-7s}$

(β') $\frac{p-r}{q-s} = \frac{r}{s}$

(δ') $\frac{p}{q+p} = \frac{r}{s+r}$

4 Ταυτότητες

11. Να αποδείξετε ότι $(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 3x^2 + 12x + 14$

12. Να αποδείξετε ότι $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

13. Να αποδείξετε ότι $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

14. Να αποδείξετε ότι $(p + \frac{1}{q})^2 - (p - \frac{1}{q})^2 = 4\frac{p}{q}$

15. Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

16. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3\alpha\beta + 3\beta\gamma + 3\gamma\alpha}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}$$

17. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + 2\alpha\beta\gamma$$

18. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\beta + \gamma - \alpha)^2 + (\gamma + \alpha - \beta)^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

19. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + (\gamma - \alpha)^3 = 3(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

20. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha} = -\frac{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}$$

21. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\beta\gamma(\beta + \gamma) + 3\gamma\alpha(\gamma + \alpha) + 6\alpha\beta\gamma$$

5 Μετατροπή σε γινόμενο παραγόντων

22. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:



$(\alpha') \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta$

$(\beta') \alpha t + \alpha u + \beta t + \beta u$

$(\gamma') \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma$

$(\delta') \alpha x^2 + \beta x^2 + \alpha + \beta$

$(\epsilon') x^3 - \beta x^2 + \alpha x - \alpha\beta$

$(\zeta') xy + xz + x\beta + \alpha y + \alpha z + \alpha\beta$

Απάντηση:

$(\alpha') \alpha(\beta + \gamma - \delta)$

$(\beta') (\alpha + \beta)(t + u)$

$(\gamma') (\beta + \gamma)(\alpha + \beta)$

$(\delta') (x^2 + 1)(\alpha + \beta)$

$(\epsilon') (x^2 + \alpha)(x - \beta)$

$(\zeta') (y + z + \beta)(x + \alpha)$

23. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

$(\alpha') x^2 + xy^3 - y^2x - y^5$

$(\beta') 2x^5 + 8x^2y^2 + 3yx^3 + 12y^3$

$(\gamma') 12xy - 8y^2x + 15yx^3 - 10x^3y^2$

$(\delta') \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x\alpha^2 - 2x^2\alpha + 10\alpha^3$

$(\epsilon') x^5 - x^2 - 2x^3 + 2$

$(\zeta') 2x^2y + 3x^2 + 2xy + 3x + 2y + 3$

Απάντηση:

$(\alpha') (x + y^3)(x - y^2)$

$(\beta') (3y + 2x^2)(x^3 + 4y^2)$

$(\gamma') (3y + 2x^2)(x^3 + 4y^2)$

$(\delta') \frac{1}{3}(-6\alpha + x)(-5\alpha^2 + x^2)$

$(\epsilon') (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 2)$

$(\zeta') (x^2 + x + 1)(2y + 3)$

6 Απλοποίηση Κλασμάτων

24. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

$(\alpha') \frac{2x-2y}{2\alpha+2\beta}$

$(\beta') \frac{tx-ty}{t\alpha+t\beta}$

$(\gamma') \frac{\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha\beta^5+\beta^6}$

$(\delta') \frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}$

$(\epsilon') \frac{9\alpha^5-16\alpha}{6\alpha^2\beta^2-8\beta^2}$

$(\zeta') \frac{\alpha^6-\beta^6}{(\alpha+\beta)^2(\alpha^3-\beta^3)}$

Απάντηση:

$(\alpha') \frac{x-y}{\alpha+\beta}$

$(\beta') \frac{x-y}{\alpha+\beta}$

$(\gamma') \frac{1}{\beta^3}$

$(\delta') \alpha + \beta$

$(\epsilon') \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 4) \frac{\alpha}{\beta^2}$

$(\zeta') \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta}$

25. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

$(\alpha') \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$

$(\beta') \frac{2\alpha^2 - 8}{\alpha + 2}$

$(\gamma') \frac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3}$

$(\delta') \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha x)^2 - (\alpha + x)^2}$

$(\epsilon') \frac{1 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3}$

$(\zeta') \frac{x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3}{x^4 - y^4}$

Απάντηση:



$$\begin{array}{ll} (\alpha') \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} & (\delta') -\frac{1}{x^2 - 1} \\ (\beta') 2\alpha - 4 & (\epsilon') \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \\ (\gamma') \frac{x - 7}{x^2 + x + 1} & (\zeta') \frac{1}{x + y} \end{array}$$

7 Επίλυση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$

26. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') 2x = 3 & (\gamma') -2x = -3 & (\epsilon') \frac{2}{7}x = \frac{3}{5} \\ (\beta') -2x = 3 & (\delta') 2x = \frac{3}{5} & (\zeta') \frac{2}{7}x = 6 \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') x = \frac{3}{2} & (\gamma') x = \frac{3}{2} & (\epsilon') x = \frac{21}{10} \\ (\beta') x = -\frac{3}{2} & (\delta') x = \frac{3}{10} & (\zeta') x = 21 \end{array}$$

27. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις (άγνωστος είναι ο x):

$$\begin{array}{ll} (\alpha') 2x + 8 = 0 & (\delta') \frac{1}{\alpha}x + t = 0, (\alpha \neq 0) \\ (\beta') 3x - 8 = 13 & (\epsilon') (\alpha + 1)x - \alpha = 0, (\alpha \neq -1) \\ (\gamma') \alpha x + t = 0, (\alpha \neq 0) & (\zeta') -\alpha x + 4 = 1, (\alpha \neq 0) \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') x = -4 & (\gamma') x = -\frac{t}{\alpha} & (\epsilon') x = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \\ (\beta') x = 7 & (\delta') x = -t\alpha & (\zeta') x = \frac{3}{\alpha} \end{array}$$

28. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') 6(x + 3) - 5x = 26 & (\delta') 60x + 1 = 3(3 + 4x) \\ (\beta') 6(x + 3) - 5x = 26 + x & (\epsilon') (6 - x)(x + 4) = 8 - x^2 \\ (\gamma') 4(4 + 2x) = 60 - 3x & (\zeta') (x - 3)^2 - 5(10 + x) = x^2 - 8 \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') x = 8 & (\gamma') x = 4 & (\epsilon') x = -8 \\ (\beta') \text{Αδύνατη.} & (\delta') x = \frac{1}{6} & (\zeta') x = -3 \end{array}$$

29. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') 3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4 & \\ (\beta') \frac{5x - 11}{4} - \frac{x - 1}{10} = \frac{11x - 1}{12} & \\ (\gamma') \frac{4}{x + 2} + \frac{7}{x + 3} = \frac{27}{(x + 2)(x + 3)} & \\ (\delta') \frac{30}{x + 5} - \frac{15}{3} - \frac{5 + 4x}{x + 5} = 0 & \\ (\epsilon') 3(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x - 4) = (2x + 7)(x + 4) & \\ (\zeta') 2x - \frac{2x}{9} = \frac{1}{9}(16x - \frac{3}{2}) & \end{array}$$

Απάντηση:



(α') $x = -48$

(γ') $x = \frac{1}{11}$

(ε') $x = -2$

(β') $x = 11$

(δ') $x = 0$

(Ϝ') Αδύνατη.

30. Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθεί η εξίσωση:

$$\lambda x + 3 = 5(x + \lambda) - 1$$

Απάντηση: Για $\lambda \neq 5$ έχει λύση $x = \frac{5\lambda - 4}{\lambda - 5}$. Για $\lambda = 5$ είναι αδύνατη.

31. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση

$$(\lambda - 1)x - \lambda^2 + 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει περισσότερες από μία λύσεις;

Απάντηση: Για $\lambda = 1$.

32. Για ποιές τιμές του t η εξίσωση

$$t(x + 1) - 3t = x - t$$

έχει λύση το $x = 5$;

Απάντηση: $t = \frac{5}{4}$

8 Εξισώσεις που ανάγονται στην $ax + \beta = 0$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α') $(2x - 6)(x + 3)(5x - 6) = 0$

(β') $(3 - 2x)(4x - 20)(x + 2)(4 + 2x) = 0$

Απάντηση:

(α') $x = 3, x = -3, x = \frac{6}{5}$

(β') $x = \frac{3}{2}, x = 5, x = -2$

34. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις παραγοντοποιώντας το ά μέλος:

(α') $x^2 - 4 = 0$

(β') $4x^2 - 9 = 0$

(γ') $x^2 - 2x + x - 2 = 0$

Απάντηση:

(α') $x = \pm 2$

(β') $x = \pm \frac{3}{2}$

(γ') $x = -1, x = 2$

9 Η διάταξη στο \mathbb{R}

35. Να γράψετε είκοσι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $1 < x < 13$.

36. Για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ είναι γνωστό ότι $\alpha < \beta, \beta < \gamma, \delta < \beta, \varepsilon > \beta$. Ποιές από τις παρακάτω σχέσεις προκύπτουν από τα παραπάνω δεδομένα;



$$(α') \alpha < \delta \quad (β') \varepsilon > \delta \quad (γ') \gamma > \delta \quad (δ') \alpha \leq \varepsilon$$

Απάντηση: Οι (α), (γ), (δ).

37. Να τοποθετήσετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{4}{8}$$

Απάντηση: $\frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2}$

10 Διαστήματα στο \mathbb{R}

38. Γράψετε δέκα αριθμούς που ανήκουν στο διάστημα $(1, 2)$:

39. Να γράψετε δέκα αριθμούς που ανήκουν στο διάστημα $(2, 4)$ αλλά και στο διάστημα $(3, 5)$.

40. Για ποιές τιμές του x ο αριθμός $2x + 1$ ανήκει στο διάστημα $(5, 7)$; Στο $[5, 7]$;

Απάντηση: Για $2 < x < 3$ δηλαδή $x \in (2, 3)$. Για $x \in [2, 3]$.

41. Πως πρέπει να επιλέξουμε τον λ ώστε να ισχύει $\frac{\lambda}{3} + 3(\lambda + 1) \in [-1, 1]$;

Απάντηση: $-\frac{6}{5} \leq \lambda < -\frac{3}{5}$ δηλαδή $\lambda \in [-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$.

42. Έστω τα διαστήματα :

$$\Delta_1 = (4, 12), \Delta_2 = [4, 12], \Delta_3 = (5, 7), \Delta_4 = (-4, 5)$$

Ποιοί από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς;

(α') Κάθε στοιχείο του Δ_1 ανήκει στο Δ_2 .

(β') Κάθε στοιχείο του Δ_3 ανήκει στο Δ_2 .

(γ') Υπάρχει στοιχείο του Δ_4 που δεν ανήκει στο Δ_1 .

(δ') Όλα τα στοιχεία του Δ_4 ανήκουν στο Δ_1 .

(ε') Αν ένας αριθμός ανήκει στο Δ_1 ανήκει και στο Δ_3 .

Απάντηση: (α'), (β'), (γ')

11 Διάταξη και πράξεις

43. Έστω ότι $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

$$(α') 6\alpha - 3 < 6\beta - 3$$

$$(β') 5(\alpha + 1) < 5(\beta + 1)$$

$$(γ') 6(\alpha - \beta) < \alpha - \beta$$

44. Έστω ότι $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$(α') 2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$$

$$(β') 2\alpha - 5\delta < 2\beta - 5\gamma$$



$$(\gamma') \frac{\alpha+\gamma}{2} + 4 < \frac{\beta+\delta}{2} + 4$$

45. Έστω ότι $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta > 0$.
46. Έστω ότι

$$\alpha < \beta \quad (1)$$

Ποιές από τις παρακάτω ανισότητες είναι βέβαιο ότι προκύπτουν από την (1);

$$(\alpha') 2\alpha < 2\beta$$

$$(\delta') 2 + \alpha < \beta$$

$$(\beta') \alpha < 2\beta$$

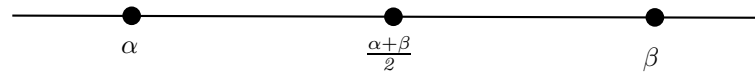
$$(\epsilon') \frac{\alpha}{2} < \beta$$

$$(\gamma') 2\alpha < \beta$$

$$(\zeta') \alpha < \beta + 2$$

Απάντηση: Οι (α) , (ζ')

47. Έστω ότι ισχύει $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι ισχύει και $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.



Στη συνέχεια να γράψετε δέκα τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\alpha < x < \beta$$

48. Να αποδείξετε ότι αν $t > \alpha$ και $t > \beta$ τότε $t^2 - \alpha t - t\beta + \alpha\beta > 0$.
49. Έστω ότι $\alpha < \beta$.

$$(\alpha') \text{ Να αποδείξετε ότι } \alpha < \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta < \beta.$$

$$(\beta') \text{ Γενικότερα να αποδείξετε ότι αν } 0 < \kappa < 1, 0 < \lambda < 1 \text{ και } \kappa + \lambda = 1 \text{ τότε ισχύει } \alpha < \kappa\alpha + \lambda\beta < \beta$$

12 Ανισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta > 0$

50. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha') 2x > 3$$

$$(\delta') -2x < -3$$

$$(\beta') 2x > -3$$

$$(\epsilon') -4x + 2 < 1$$

$$(\gamma') -2x < 3$$

$$(\zeta') 8(x+2) > 4$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{3}{2} < x$$

$$(\delta') \frac{3}{2} < x$$

$$(\beta') -\frac{3}{2} < x$$

$$(\epsilon') \frac{1}{4} < x$$

$$(\gamma') -\frac{3}{2} < x$$

$$(\zeta') -\frac{3}{2} < x$$

51. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:



$$\begin{array}{ll} (\alpha') \alpha x > 4 \text{ όταν } \alpha > 0. & (\gamma') (2\alpha - 1)x < \alpha + 1 \text{ όταν } \alpha > \frac{1}{2} \\ (\beta') (\alpha - 2)x + 2 \leq 0 \text{ όταν } \alpha > 2 & (\delta') (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x < 3 + 2\alpha \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') \frac{4}{\alpha} < x & (\gamma') x < \frac{\alpha+1}{2\alpha-1} \\ (\beta') x \leq \frac{-2}{\alpha-2} & (\delta') x < \frac{3+2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1} \end{array}$$

52. Δίνεται η ανίσωση

$$3x + 4 < 5 \quad (1)$$

Να βρείτε για ποιές τιμές του t ο αριθμός $2t - 1$ είναι λύση της ανίσωσης (1);

Απάντηση: $t < \frac{2}{3}$

13 Ανισώσεις που ανάγονται στην $\alpha x + \beta > 0$

53. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') (x - 1)(x - 3) > 0 & (\delta') (1 - 3x)(x + 7) > 0 \\ (\beta') (2x - 1)(4x - 3) > 0 & (\epsilon') (x - 3)(x + 7) \geq 0 \\ (\gamma') (4 - x)(x - 7) < 0 & (\zeta') (x - 2)(x - 5)(x - 7) > 0 \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') x < 1 \text{ ή } 3 < x & (\delta') -7 < x < \frac{1}{3} \\ (\beta') x < \frac{1}{2} \text{ ή } \frac{3}{4} < x & (\epsilon') x \leq -7 \text{ ή } 3 \leq x \\ (\gamma') x < 4 \text{ ή } 7 < x & (\zeta') 2 < x < 5 \text{ ή } 7 < x \end{array}$$

54. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') (x - \alpha)(x - \beta) < 0 & \\ (\beta') (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) < 0 & \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') \alpha < x < \beta & (\beta') x < \alpha \text{ ή } \beta < x < \gamma \end{array}$$

55. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\begin{array}{ll} (\alpha') \frac{x+9}{x-3} < 0 & (\delta') \frac{x+3}{x+2} < 1 \\ (\beta') \frac{4x-3}{2x+1} \geq 0 & (\epsilon') \frac{8}{2x+3} - \frac{2}{4x+5} < 0 \\ (\gamma') \frac{5x-6}{6x-5} < 0 & (\zeta') \frac{5}{x+2} < \frac{10}{2x+4} \end{array}$$

Απάντηση:



$(\alpha') -9 < x < 3$

$(\beta') x < -\frac{1}{2} \text{ ή } \frac{3}{4} \leq x$

$(\gamma') \frac{5}{6} < x < \frac{6}{5}$

$(\delta') x < -2$

$(\epsilon') x < -\frac{3}{2} \text{ ή } -\frac{5}{4} < x < -\frac{17}{14}$

$(\zeta') \text{ αδύνατη}$

56. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$(\alpha') (x+1)(x+2)(x+3) < 0$

$(\beta') (x^3 - 3x + 2)(x^2 - 1) > 0$

$(\gamma') \frac{(x+1)(2-x)}{x+3} \geq 0$

$(\delta') \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} < 0$

$(\epsilon') \frac{1-\frac{2}{x}}{x+1} < 0$

$(\zeta') \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x} < 0$

Απάντηση:

$(\alpha') x < -3 \text{ ή } -2 < x < -1$

$(\beta') -2 < x < -1 \text{ ή } 1 < x$

$(\gamma') x < -3 \text{ ή } -1 \leq x \leq 2$

$(\delta') -2 < x < -1 \text{ ή } 1 < x$

$(\epsilon') x < -1 \text{ ή } 0 < x < 2$

$(\zeta') -2 < x < 0$

14 Τετραγωνικές Ρίζες

57. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$(\alpha') A = \sqrt{5}(3 + \sqrt{5}) - (2 - \sqrt{5})^2$

$(\beta') B = \sqrt{3\sqrt{2}-2}^2 + (\sqrt{2}+1)^2$

$(\gamma') \Gamma = (2 + 4\sqrt{7})(2 - 4\sqrt{7})(1 + \sqrt{7})$

$(\delta') \Delta = \sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^4$

Απάντηση: $A = 7\sqrt{5} - 4$, $B = 5\sqrt{2} + 1$, $\Gamma = -108 - 108\sqrt{7}$, $\Delta = 12 + 3\sqrt{3}$

58. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$(\alpha') \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{3}}}$

$(\beta') (2 - \sqrt{2})^{-1} + (2 + \sqrt{2})^{-1}$

Απάντηση:

$(\alpha') \frac{4\sqrt{2}}{5}$

$(\beta') 2$

59. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$(\alpha') (\sqrt{\alpha} + 1)^2 + (\sqrt{\alpha} - 1)^2 = 2\alpha + 2$

$(\beta') \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$(\gamma') (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 - (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = 4\sqrt{\alpha\beta}$

$(\delta') (\sqrt{x} + 1)^3 = (x + 3)\sqrt{x} + 3x + 1$

60. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα χωρίς ριζικά στον παρονομαστή:



$$(\alpha') \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

$$(\gamma') \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$(\beta') \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$(\delta') \frac{x}{\sqrt{x+1}-x}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$(\gamma') \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

$$(\beta') \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

$$(\delta') \frac{x(\sqrt{x+1}+x)}{x+1-x^2}$$

15 Τετραγωνικές ρίζες και πράξεις

61. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$$(\alpha') \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^8} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$$

$$(\beta') \sqrt{3^{11} \cdot 5^{19} \cdot 11^4} = 3^5 \cdot 5^9 \cdot 11^2 \sqrt{15}$$

$$(\gamma') \sqrt{3^5 \cdot 7^3 \cdot 11^7} = 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 \sqrt{231}$$

62. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha') A = \sqrt{\alpha^2 \beta^4}$$

$$(\beta') B = \sqrt{\alpha^8 \beta^2 \gamma^4}$$

$$(\gamma') \Gamma = \sqrt{\alpha^2 \sqrt{\beta^4} \sqrt{\gamma^8}}$$

$$(\delta') \Delta = \sqrt{\alpha^5 \beta^7 \gamma^7}$$

Απάντηση: $A = \alpha\beta^2$, $B = \alpha^4\beta\gamma^2$, $\Gamma = \alpha\beta\gamma$, $\Delta = \alpha^2\beta^3\gamma^3\sqrt{\alpha\beta\gamma}$

63. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha') A = \sqrt{\frac{\alpha^4}{\beta^4\gamma^6}}$$

$$(\gamma') \Gamma = \sqrt{\frac{\alpha^6\sqrt{\beta^4}}{\sqrt{\beta^8\gamma^4}}}$$

$$(\beta') B = \sqrt{\frac{\alpha^3\beta^2}{\gamma^8}}$$

$$(\delta') \Delta = \sqrt{\frac{4\alpha^4}{49\beta^2\gamma^{-6}}}$$

Απάντηση: $\frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^3}$, $B = \frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\sqrt{\alpha}$, $\Gamma = \frac{\alpha^3}{\beta\gamma}$, $\Delta = \frac{2\alpha^2\gamma^3}{7\beta}$

64. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

65. Να αποδείξετε ότι αν $t_1 = \alpha + \sqrt{\beta}$, $t_2 = \alpha - \sqrt{\beta}$ τότε :

$$(\alpha') t_1 + t_2 = 2\alpha$$

$$(\beta') t_1 t_2 = \alpha^2 - \beta$$

$$(\gamma') t_1^2 + t_2^2 = 2\alpha^2 + 2\beta$$

$$(\delta') t_1^3 + t_2^3 = 2\alpha^3 + 6\alpha\beta$$

16 Η εξίσωση $x^2 = \alpha$

66. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις



$$(\alpha') x^2 = 4$$

$$(\beta') x^2 = 7$$

$$(\gamma') m^2 = 16$$

$$(\delta') A^2 = B, \text{ ως προς } A \text{ με } B > 0$$

$$(\epsilon') x^2 = -10$$

$$(\zeta') (2x - 3)^2 = 7$$

Απάντηση:

$$(\alpha') x = \pm 2$$

$$(\beta') x = \pm\sqrt{7}$$

$$(\gamma') m = \pm 4$$

$$(\delta') A = \pm\sqrt{B}$$

$$(\epsilon') \text{ Αδύνατη.}$$

$$(\zeta') x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

67. Για ποιές τιμές του m η εξίσωση $x^2 = 2m - 1$ με άγνωστο το x έχει λύση; Ποιά είναι η λύση;

Απάντηση: Πρέπει $\frac{1}{2} \leq m$ και στην περίπτωση αυτή λύσεις είναι οι αριθμοί $x = \pm\sqrt{2m-1}$.

68. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ως προς τον σημειούμενο άγνωστο υποθέτοντας ότι έχουν λύση:

$$(\alpha') x^2 - s = 0 \text{ ως προς } x$$

$$(\beta') y^2 - a = b^2 \text{ ως προς } y$$

$$(\gamma') 2u^2 = 1 - p \text{ ως προς } u$$

$$(\delta') \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \text{ ως προς } \alpha$$

Απάντηση: $(\alpha') x = \pm\sqrt{s}$, $(\beta') y = \pm\sqrt{a+b^2}$ $(\gamma') u = \pm\sqrt{\frac{1-p}{2}}$ $(\delta') \alpha = \pm\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$

17 Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

69. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(\alpha') 4x^2 + 92x + 333 = 0$$

$$(\beta') x^2 + 23x + 76 = 0$$

$$(\gamma') x^2 + 23x + 102 = 0$$

$$(\delta') -2x^2 + 3x + 20 = 0$$

$$(\epsilon') -2x^2 + 3x + 77 = 0$$

$$(\zeta') 64x^2 - 64x - 273 = 0$$

Απάντηση:

$$(\alpha') x = -\frac{37}{2}, x = -\frac{9}{2}$$

$$(\beta') x = -19, x = -4$$

$$(\gamma') x = -17, x = -6$$

$$(\delta') x = -\frac{5}{2}, x = 4$$

$$(\epsilon') x = -\frac{11}{2}, x = 7$$

$$(\zeta') x = -\frac{13}{8}, x = \frac{21}{8}$$

70. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις έχοντας ως δεδομένο ότι η διακρίνουσα τους είναι μεγαλύτερη του μηδενός:

$$(\alpha') x^2 + \alpha x - \beta = 0$$

$$(\beta') 2x^2 + 4\alpha x - \beta = 0$$

$$(\gamma') x^2 + (\beta - 2\alpha)x - 2\alpha\beta = 0$$

$$(\delta') 2x^2 + 5\alpha x - 12\alpha^2 = 0$$

$$(\epsilon') x^2 + \mu x + \nu = 0$$

$$(\zeta') \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

Απάντηση:



$$\begin{aligned}(\alpha') x &= \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \\(\beta') x &= -\alpha \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha^2 + 2\beta} \\(\gamma') x &= 2\alpha, x = -\beta \\(\delta') x &= -4\alpha, x = \frac{3}{2}\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon') x &= \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\nu}}{2} \\(\zeta') x &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}\end{aligned}$$

71. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

Να λύσετε την εξίσωση (2):

(α') Ως προς x (δηλαδή θεωρώντας ότι άγνωστος της είναι το x).

(β') Ως προς y .

Απάντηση:

$$(\alpha') x = (-1 \pm \sqrt{2})y$$

$$(\beta') y = (1 \pm \sqrt{2})x$$

72. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο διαφορετικές λύσεις.

$$(\alpha') x^2 + 4x - 3\lambda = 0$$

$$(\beta') (2 + 3\lambda)x^2 + 3x + 1 = 0$$

Απάντηση:

$$(\alpha') -\frac{4}{3} < \lambda$$

$$(\beta') \lambda < \frac{1}{12}$$

73. Να βρείτε ποιος πρέπει να είναι ο λ ώστε:

(α') Η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + 2 = 0$ να έχει λύση τον αριθμό $x = -1$

(β') Η εξίσωση $\lambda^2 x^2 - 3x + \lambda = 0$ να έχει λύση τον αριθμό $x = 1$

Απάντηση: (α') $\lambda = 1$ (β') $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$

18 Εξισώσεις που ανάγονται στην $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

74. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(\alpha') 2x + \frac{21}{x+4} = 9$$

$$(\delta') \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}$$

$$(\beta') \frac{23}{x-1} + 3 + \frac{70}{x^2-4x+3} = 0$$

$$(\epsilon') \frac{(3-x)^3 + (4+x)^3}{(3-x)^2 + (4+x)^2} = 7$$

$$(\gamma') \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} = 2$$

$$(\zeta') \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') x = -\frac{5}{2}, x = 3$$

$$(\delta') x = -2, x = -1$$

$$(\beta') x = -2, x = -\frac{5}{3}$$

$$(\epsilon') x = -4, x = 3$$

$$(\gamma') x = 3 \pm \sqrt{6}$$

$$(\zeta') x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}, x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις



$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\
 (\beta') \quad & (2x + 1)^2 - 3(2x + 1) - 1 = 0 \\
 (\gamma') \quad & \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) + 2 = 0 \\
 (\delta') \quad & \frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2 \\
 (\epsilon') \quad & (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0 \\
 (\zeta') \quad & 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9
 \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & x = 1, x = 2, x = -2, x = -1 & (\delta') \quad & x = 0 \\
 (\beta') \quad & x = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{13} & (\epsilon') \quad & x = -2, x = 1 \\
 (\gamma') \quad & x = -4 & (\zeta') \quad & x = 2, x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

19 Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$

76. Να λύσετε, χωρίς χαρτί και μολύβι, τις ανισώσεις

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & (x + 2)(x - 2) < 0 & (\delta') \quad & (2x + 3)(3x - 4) \leq 0 \\
 (\beta') \quad & (x + 3)(x + 7) \geq 0 & (\epsilon') \quad & (x + 5)(2x + 5) > 0 \\
 (\gamma') \quad & \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) < 0 & (\zeta') \quad & (3 - 2x)(3x + 2) > 0
 \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & -2 < x < 2 & (\delta') \quad & -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{4}{3} \\
 (\beta') \quad & x \leq -7 \text{ ή } -3 \leq x & (\epsilon') \quad & x < -5 \text{ ή } -\frac{5}{2} < x \\
 (\gamma') \quad & -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} & (\zeta') \quad & -\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

77. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις έχοντας ως δεδομένο ότι $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta$

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & (x - \alpha)(x - \beta) < 0 & (\delta') \quad & (x + \gamma)(x + \delta) \geq 0 \\
 (\beta') \quad & (x + \alpha)(x + \beta) > 0 & (\epsilon') \quad & (2x - \alpha)(x - \alpha) < 0 \\
 (\gamma') \quad & (x + \alpha)(x - \delta) \leq 0 & (\zeta') \quad & (\alpha - x)(x + \gamma) > 0
 \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & \alpha < x < \beta & (\delta') \quad & x \leq -\delta \text{ ή } x \geq -\gamma \\
 (\beta') \quad & x < -\beta \text{ ή } x > -\alpha & (\epsilon') \quad & \frac{\alpha}{2} < x < \alpha \\
 (\gamma') \quad & -\alpha \leq x \leq \delta & (\zeta') \quad & -\gamma < x < \alpha
 \end{aligned}$$

78. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & x^2 - x - 12 > 0 & (\epsilon') \quad & 4x^2 + x - 1 > 0 \\
 (\beta') \quad & -3x^2 + 2x + 1 > 0 & (\zeta') \quad & x^2 + 4x + 6 < 0 \\
 (\gamma') \quad & 4x^2 - 4x + 1 > 0 & (\delta') \quad & -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \\
 (\delta') \quad & 3x^2 - 4x + 1 < 0 & (\eta') \quad & 4x^2 + 4x + 9 > 0
 \end{aligned}$$



Απάντηση:

$$(\alpha') x < -3 \text{ ή } 4 < x$$

$$(\beta') -\frac{1}{3} < x < 1$$

$$(\gamma') x < \frac{1}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} < x \text{ δηλαδή } x \neq \frac{1}{2}$$

$$(\delta') x < 1 \text{ ή } \frac{1}{3} < x$$

$$(\epsilon') x < \frac{-1-\sqrt{17}}{8} \text{ ή } \frac{-1+\sqrt{17}}{8} < x$$

$$(\zeta') \text{ Αδύνατη}$$

$$(\eta') x = \frac{1}{2}$$

$$(\theta') \text{ κάθε } x \in \mathbb{R}$$

79. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$(\alpha') 1 < x^2 - x < 2$$

$$(\beta') -1 < \frac{x}{x^2+1} \leq 2$$

Απάντηση:

$$(\alpha') -1 < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ή } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 2$$

$$(\beta') \text{ Κάθε } x \text{ είναι λύση.}$$

80. Να βρείτε για ποιες τιμές του y η εξίσωση

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1} = y$$

έχει λύση ως προς x .

$$\text{Απάντηση: } -2 \leq y \leq 2$$

81. Να βρείτε για ποιες τιμές του y υπάρχει x ώστε

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = y$$

$$\text{Απάντηση: } y \leq -8 - 2\sqrt{15} \text{ ή } -8 + 2\sqrt{15} \leq y$$

82. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν τα επόμενα:

$$(\alpha') \text{ Η εξίσωση } 3x^2 - 4\lambda x + \lambda + 1 = 0 \text{ έχει δύο διαφορες λύσεις.}$$

$$(\beta') \lambda x^2 + 4\lambda x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(\gamma') \text{ Το κλάσμα } \frac{x}{x^2+x+\lambda} \text{ ορίζεται για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(\delta') \text{ Η παράσταση } \sqrt{2x^2 + \lambda x + 1} \text{ ορίζεται για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \lambda < \frac{3-\sqrt{57}}{8} \text{ ή } \frac{3+\sqrt{57}}{8} < \lambda$$

$$(\beta') 0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$$

$$(\gamma') \frac{1}{4} < \lambda$$

$$(\delta') -2\sqrt{2} < \lambda < 2\sqrt{2}$$



20 Ανισώσεις που ανάγονται στην $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$

83. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$(\alpha') (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) > 0$$

$$(\beta') (x^4 - 3x^2 + 1)(2x^2 - 4x + 1) < 0$$

Απάντηση:

$$(\alpha') x < 1 \text{ ή } 2 < x < 3 \text{ ή } 4 < x$$

$$(\beta') -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ή } 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ή } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

84. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$(\alpha') \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$(\beta') \frac{1}{x} < \frac{x}{x+1} < 4$$

$$(\gamma') \frac{x^2+x-1}{x^2+x-2} \leq 0$$

$$(\delta') \frac{1}{(x-1)(x-2)} > \frac{1}{x(x+3)}$$

$$(\epsilon') x^4 - 5x^2 + 4 > 0$$

$$(\zeta') \frac{x^4-2x^2-2}{x^4-x^2-6} < \frac{1}{2}$$

$$(\eta') -1 < \frac{x^2+1}{x+1} < 1$$

Απάντηση:

$$(\alpha') x < -1 \text{ ή } 0 < x$$

$$(\beta') x < -\frac{4}{3} \text{ ή } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 0 \text{ ή } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x$$

$$(\gamma') -2 < x \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ή } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \leq x < 1$$

$$(\delta') -3 < x < 0 \text{ ή } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ή } 2 < x$$

$$(\epsilon') x < -2 \text{ ή } -1 < x < 1 \text{ ή } 2 < x$$

$$(\zeta') -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ή } -1 < x < 1 \text{ ή } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

$$(\eta') 0 < x < 1$$

21 Άθροισμα και γινόμενο ριζών της $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

85. Με δεδομένο ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών τους χωρίς να τις λύσετε.

$$(\alpha') 2x^2 - 58x + 12 = 0$$

$$(\gamma') 2x^2 - 2\alpha x + 6 = 0$$

$$(\beta') t^2 + 1500t - 2 = 0$$

$$(\delta') tx^2 - 2tx + t^2 = 0$$

Απάντηση:

$$(\alpha') S = 29, P = 6$$

$$(\gamma') S = \alpha, P = 3$$

$$(\beta') S = -1500, P = -2$$

$$(\delta') S = 2, P = t$$

86. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει λύσεις ρ_1, ρ_2 . Να εφράσετε συναρτήσει των α, β, γ τις παραστάσεις:



$$(\alpha') \rho_1(\rho_2 + 1) + \rho_2(\rho_1 + 1) \qquad (\beta') \frac{1}{\rho_1 + 1} + \frac{1}{\rho_2 + 1}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \frac{2\gamma - \beta}{\alpha} \qquad (\beta') \frac{2\alpha - \beta}{\alpha + \gamma - \beta}$$

22 Κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τις ρίζες της

87. Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει κατα περίπτωση ρίζες τους αριθμούς

$$\begin{array}{ll} (\alpha') -1 \text{ και } -4 & (\gamma') \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13} \text{ και } \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13} \\ (\beta') -\frac{5}{8} \text{ και } \frac{1}{3} & (\delta') \sqrt{3} \text{ και } \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') x^2 + 5x + 4 = 0 & (\gamma') 3x^2 - x - 1 = 0 \\ (\beta') 24x^2 + 7x - 5 = 0 & (\delta') 12x^2 - 16x\sqrt{3} + 12 = 0 \end{array}$$

88. Κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζα τον αριθμό 1. Βρείτε την άλλη ρίζα της.

$$(\alpha') 2x^2 + 928x - 930 = 0 \qquad (\beta') x^2 - 8193x + 8192 = 0$$

Απάντηση:

$$(\alpha') -465 \qquad (\beta') 8192$$

89. Στις παρακάτω περιπτώσεις δίνεται το άθροισμα S και το γινόμενο P δύο αριθμών. Να βρείτε τους αριθμούς.

$$\begin{array}{ll} (\alpha') S = 15, P = 14 & (\gamma') S = 12, P = 3 \\ (\beta') S = -19, P = 84 & (\delta') S = 2\alpha, P = \alpha^2 - \beta^2 \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') 14 \text{ και } 1 & (\gamma') 6 + \sqrt{33} \text{ και } 6 - \sqrt{33} \\ (\beta') -7 \text{ και } -12, & (\delta') \alpha + \beta, \alpha - \beta \end{array}$$

23 Πρόσχημο ριζών της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

90. Με δεδομένο ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες να βρείτε το πρόσχημο των ριζών χωρίς να λύσετε τις εξισώσεις.

$$\begin{array}{ll} (\alpha') 7x^2 + 14x - 1 = 0 & (\gamma') 6x^2 - 14x + 1 = 0 \\ (\beta') -3x^2 - 9x + 2 = 0 & (\delta') 3x^2 + 5x + 1 = 0 \end{array}$$



Απάντηση:

(α') μία θετική, μία αρνητική

(γ') δύο θετικές

(β') μία θετική, μία αρνητική

(δ') δύο αρνητικές

91. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση

$$x^2 - x\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 =$$

έχει δύο θετικές ρίζες;

Απάντηση: $\frac{1}{2} < \lambda < 1$

24 Ρίζες ανώτερης τάξης

92. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha') A = \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{54}$$

$$(\beta') B = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{128}$$

$$(\gamma') \Gamma = \sqrt[5]{64} + \sqrt[5]{128} + \sqrt[5]{256}$$

Απάντηση: $A = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}$, $B = 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2^3}$, $\Gamma = 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2^2} + 2\sqrt[5]{2^3}$

93. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$$(\alpha') (1 + \sqrt[3]{2})^3 = 3 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2^2}$$

$$(\beta') (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 = 1 - 3\sqrt[3]{3^2}\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2^2}$$

$$(\gamma') \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$(\delta') \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \sqrt[6]{2} - 2\sqrt[24]{2^5} + \sqrt[4]{2}$$

94. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$$(\alpha') (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = x + 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2} + y$$

$$(\beta') (\sqrt[3]{x} + \sqrt{y})^6 = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$$

$$(\gamma') (\sqrt[3]{x} + \sqrt{y})^6 - (\sqrt[3]{x} - \sqrt{y})^6 = 4x\sqrt{y}$$

95. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{5 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2^2}} = 1 + \sqrt[3]{4}$

96. Έστω ότι $\sqrt[3]{\alpha} = x$ και $\sqrt[3]{\beta} = y$. Να αποδείξετε ότι $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = \alpha + \beta$

97. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = x + 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x}$.

25 Ρίζες ανώτερης τάξης και πράξεις

98. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \sqrt[6]{2} - 2\sqrt[24]{2^5} + \sqrt[4]{2}$$

99. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:



$$\begin{aligned} (\alpha') \quad A &= \sqrt[3]{\alpha^6 \beta^{12} \gamma^{33}} & (\gamma') \quad \Gamma &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha^{18} \beta^9} \sqrt{\gamma^{12}}} \\ (\beta') \quad B &= \sqrt[5]{\alpha^{20} \beta^{15} \gamma^{25}} & (\delta') \quad \Delta &= \sqrt[3]{\alpha^7 \beta^{27} \gamma^{18}} \end{aligned}$$

Απάντηση: $A = \alpha^2 \beta^4 \gamma^{11}$, $B = \alpha^4 \beta^3 \gamma^5$, $\Gamma = \alpha^2 \beta^3 \gamma^2$, $\Delta = \sqrt[3]{\alpha^7 \beta^9 \gamma^6}$

100. Να απλοποιήσετε τα ριζικά (όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί):

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad \sqrt[4]{16p^4d^8} & & (\gamma') \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} \\ (\beta') \quad \sqrt[3]{x^9y^{21}} & & (\delta') \quad \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^4 \sqrt{\beta^2}}} \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad 2pd^2 \quad (\beta') \quad x^3y^7 \quad (\gamma') \quad \sqrt[8]{x} \quad (\delta') \quad \sqrt[3]{\alpha^2 \sqrt[4]{\beta}}$$

101. Αν $\sqrt{\alpha} = t$ να εκφράσετε συναρτήσει του t την παράσταση $\left(\sqrt[4]{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^2$

Απάντηση: $\sqrt{t^3}$

102. Με δεδομένο ότι $\sqrt[5]{\alpha} = 12$ και $\sqrt[5]{\beta} = 33$ να βρείτε τα:

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad \sqrt[5]{\alpha\beta} & & (\gamma') \quad \sqrt[5]{\alpha^2} - \sqrt[5]{\beta^2} \\ (\beta') \quad \frac{\sqrt[5]{\alpha}}{\sqrt[5]{\beta}} & & (\delta') \quad \frac{\sqrt[5]{t\alpha}}{\sqrt[5]{t\beta}} \end{aligned}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad 396 & & (\gamma') \quad -945 \\ (\beta') \quad \frac{4}{11} & & (\delta') \quad \frac{4}{11} \end{aligned}$$

103. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ριζικά σε ριζικά με τον ίδιο δείκτη:

$$\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[4]{\beta}, \sqrt[6]{\gamma}$$

Απάντηση: $\sqrt[12]{\alpha^4}, \sqrt[12]{\beta^3}, \sqrt[12]{\gamma^2}$

26 Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

104. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad x^3 &= 8 & (\gamma') \quad x^3 &= 1 - \sqrt{2} \\ (\beta') \quad x^3 &= -8 & (\delta') \quad x^3 &= -\frac{8}{27} \end{aligned}$$

Απάντηση:



$(\alpha') x = 2$

$(\beta') x = -2$

$(\gamma') x = -\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

$(\delta') x = -\frac{2}{3}$

105. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$(\alpha') x^{12} = 2^{12}$

$(\beta') x^{13} = -2^{13}$

Απάντηση:

$(\alpha') 2$

$(\beta') -2$

27 Ορίζουσες 2×2

106. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$(\alpha') \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$(\gamma') \begin{vmatrix} t & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$(\beta') \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$(\delta') \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{5}{8} \end{vmatrix}$

Απάντηση:

$(\alpha') -2$

$(\gamma') t+6$

$(\beta') 18$

$(\delta') \frac{47}{48}$

107. Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες των οριζουσών:

- Αν σε μία ορίζουσα οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται δηλαδή ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$
- Αν σε μία ορίζουσα αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες) τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο δηλαδή $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix}$

28 Συστήματα α' βαθμού με δύο αγνώστους

108. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$(\alpha') \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

$(\delta') \begin{cases} \frac{x}{3} + y = 6 \\ \frac{x+4}{3} + 3(y-1) = 7 \end{cases}$

$(\beta') \begin{cases} x + 4y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

$(\epsilon') \begin{cases} \frac{2x-1}{3x+y} = 2 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

$(\gamma') \begin{cases} 2(x-1) + 4y = 1 \\ x - 3(y-2) = 5 \end{cases}$

$(\zeta') \begin{cases} 2(x+3y) - \frac{y}{4} = 2 \\ 4(x-y) - 1 = 0 \end{cases}$

Απάντηση:



(α') $x = \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}$

(β') αδύνατο

(γ') $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

(δ') $x = 14, y = \frac{4}{3}$

(ε') $x = -\frac{19}{10}, y = \frac{33}{10}$

(ς') $x = \frac{55}{124}, y = \frac{6}{31}$

109. Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα παρακάτω συστήματα. Σε όλες τις περιπτώσεις να υποθέσετε ότι $D \neq 0$.

(α')
$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + y = 1 \\ x + y = \beta \end{array} \right\}$$

(δ')
$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \beta x + \alpha y = \gamma \end{array} \right\}$$

(β')
$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon x + \gamma y = 1 \\ \mu x + y = 1 \end{array} \right\}$$

(ε')
$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{y}{\alpha} = \beta \\ x + \frac{y}{\beta} = \alpha \end{array} \right\}$$

(γ')
$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda y = \lambda \\ x + \mu y = \mu \end{array} \right\}$$

(ς')
$$\left. \begin{array}{l} a(x + y) = \beta \\ \gamma(x - y) = \delta \end{array} \right\}$$

Απάντηση:

(α') $x = \frac{1-\beta}{\alpha-1}, y = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha-1}$

(δ') $x = \frac{\gamma}{\beta+\alpha}, y = \frac{\gamma}{\beta+\alpha}$

(β') $x = \frac{1-\gamma}{\varepsilon-\gamma\mu}, y = \frac{\varepsilon-\mu}{\varepsilon-\gamma\mu}$

(ε') $x = 0, y = \alpha\beta$

(γ') $x = 0, y = 1$

(ς') $x = \frac{1}{2} \frac{\gamma\beta+\delta\alpha}{\gamma\alpha}, y = \frac{1}{2} \frac{\gamma\beta-\delta\alpha}{\gamma\alpha}$

110. Για τους αριθμούς x, y είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$2x + 3y = 5$$

$$x + 11y = 9$$

Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x+1}{y+1}$$

Απάντηση: $\frac{47}{32}$

29 Συστήματα α' βαθμού με περισσότερους από δύο αγνώστους

111. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

(α')
$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ x + 3y = 5 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

(γ')
$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ 3y = 5z \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\}$$

(β')
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 2x - y - z = -1 \end{array} \right\}$$

(δ')
$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ 3y = 5z \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\}$$

Απάντηση:



$$(\alpha') \quad x = 2, y = 1, z = -5$$

$$(\beta') \quad x = 0, y = \frac{2}{7}, z = \frac{5}{7}$$

$$(\gamma') \quad x = 2, y = 1, z = -5$$

$$(\delta') \quad x = \frac{50}{9}, y = \frac{25}{9}, z = \frac{5}{3}$$

112. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

$$(\alpha') \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{3} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$(\beta') \quad \left. \begin{aligned} \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 10 \end{aligned} \right\}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad x = \frac{1}{5}, y = \frac{8}{15}, z = \frac{4}{15}$$

$$(\beta') \quad x = \frac{20}{29}, y = \frac{30}{29}, z = \frac{40}{29}$$

30 Συστήματα που ανάγονται σε συστήματα α' βαθμού.

113. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

$$(\alpha') \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 8 \end{aligned} \right\}$$

$$(\beta') \quad \left. \begin{aligned} xy + yz = 8 \\ yz + zx = 9 \\ zx + xy = 5 \end{aligned} \right\}$$

$$(\gamma') \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{1}{y} + \frac{2}{z} - \frac{3}{x} = 2 \\ \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 6 \end{aligned} \right\}$$

$$(\delta') \quad \left. \begin{aligned} \frac{3}{3x-1} - \frac{5}{6y+1} = 9 \\ \frac{4}{3x-1} + \frac{2}{6y+1} = -1 \end{aligned} \right\}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad x = 1, y = \frac{1}{2}$$

$$(\beta') \quad x = 1, y = 2, z = 3 \text{ ή } x = -1, y = -2, z = -3$$

$$(\gamma') \quad x = \frac{12}{5}, y = -\frac{12}{17}, z = \frac{3}{7}$$

$$(\delta') \quad x = 1, y = -\frac{5}{18}$$

31 Συστήματα β' βαθμού ή ανωτέρου

114. Να λύσετε τα συστήματα

$$(\alpha') \quad \left. \begin{aligned} y = x + 1 \\ y = 2x^2 + x - 1 \end{aligned} \right\}$$

$$(\beta') \quad \left. \begin{aligned} y = 2x \\ xy = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$(\gamma') \quad \left. \begin{aligned} x + 2y = 3 \\ x^2 + y = 8 \end{aligned} \right\}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad x = 1, y = 2 \text{ και } x = -1, y = 0$$

$$(\beta') \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \text{ και } x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

$$(\gamma') \quad x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{105}, y = \frac{11}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{105} \text{ και } x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{105}, y = \frac{11}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{105}.$$

115. Να λύσετε τα συστήματα:

$$(\alpha') \quad \left. \begin{aligned} x + y = 7 \\ y = \frac{6}{x} \end{aligned} \right\}$$

$$(\beta') \quad \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} (\gamma') \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36} \end{array} \right\} \\ (\delta') \quad \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ y = 3x \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad x = 1, y = 6 \text{ ή } x = 6, y = 1$$

$$(\beta') \quad x = -4, y = -4 \text{ ή } x = -6, y = -2$$

$$(\gamma') \quad x = 3, y = 2 \text{ ή } x = 2, y = 3$$

$$(\delta') \quad x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{65}, \quad y = -\frac{3}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{65} \text{ ή } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{65}, \quad y = -\frac{3}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{65}$$

32 Επίλυση σχέσεων

116. Να λύσετε τις παρακάτω σχέσεις ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή:

$$(\alpha') \quad \bar{\alpha} = \frac{v-v_0}{t-t_0} \text{ ως προς } t$$

$$(\beta') \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \text{ ως προς } t$$

$$(\gamma') \quad \Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 g} \text{ ως προς } F_2$$

$$(\delta') \quad B = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \text{ ως προς } h$$

$$(\epsilon') \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \text{ ως προς } r$$

$$(\zeta') \quad \frac{P_1 T_2 V_1}{T_1} = P_2 V_2 \text{ ως προς } T_1.$$

$$(\eta') \quad \left(\frac{x_1-d}{d}\right)^2 = \frac{|q_2|}{|q_1|} \text{ ως προς } x_1.$$

$$(\theta') \quad V = kQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \text{ ως προς } r_2.$$

$$(\vartheta') \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \text{ ως προς } R_3.$$

Απάντηση:

$$(\alpha') \quad t = \frac{\bar{\alpha} t_0 + v - v_0}{\bar{\alpha}}$$

$$(\beta') \quad t = \frac{1}{2\alpha} \left(-2v_0 \pm 2\sqrt{v_0^2 + 2\alpha x}\right)$$

$$(\gamma') \quad F_2 = -F_1 \sigma \nu \nu \varphi \pm \sqrt{(F_1^2 (\sigma \nu \nu \varphi)^2 - F_1^2 + \Sigma^2)}$$

$$(\delta') \quad h = -\frac{BR + \sqrt{BGMm}}{B}$$

$$(\epsilon') \quad r = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{2^3 T^2 \pi GM}$$

$$(\zeta') \quad T_1 = P_1 T_2 \frac{V_1}{P_2 V_2}$$

$$(\eta') \quad x_1 = d \pm \frac{d}{|q_1|} \sqrt{|q_1| |q_2|}$$

$$(\theta') \quad r_2 = kQ \frac{r_1}{kQ - V r_1}$$

$$(\vartheta') \quad R_3 = \frac{RR_1 R_2}{R_1 R_2 - RR_2 - RR_1}$$

33 Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών. Η έννοια της απόλυτης τιμής

117. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



$$(\alpha') |-7| =$$

$$(\beta') \left| \frac{1}{3} \right| =$$

$$(\gamma') |3^2 - 11| =$$

$$(\delta') |5 - 3^{2000}| =$$

$$(\epsilon') \left| \frac{1}{4111} - \frac{1}{8111} \right| =$$

$$(\zeta') |x^2 + 3| =$$

Απάντηση

$$(\alpha') 7$$

$$(\beta') \frac{1}{3}$$

$$(\gamma') 2$$

$$(\delta') 3^{2000} - 5$$

$$(\epsilon') \frac{1}{4111} - \frac{1}{8111}$$

$$(\zeta') x^2 + 3$$

118. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha') A = |1 - |2 - 3||$$

$$(\beta') B = \left| \left| \frac{1}{3} - 4 \right| - \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right| \right|$$

$$(\gamma') \Gamma = \left| \left(5 - \frac{25}{2} \right) \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \right|$$

$$(\delta') \Delta = \left| \frac{|3| - 5}{6 - |-7|} \right|$$

$$(\epsilon') E = ||4 - 8| - ||7 - 9| - 11||$$

$$(\zeta') Z = |1 - 3^{34}| - |7 - 3^{34}|$$

Απάντηση

$$(\alpha') 0$$

$$(\beta') \frac{7}{2}$$

$$(\gamma') \frac{15}{8}$$

$$(\delta') 2$$

$$(\epsilon') 5$$

$$(\zeta') 6$$

119. Με δεδομένο ότι $\alpha > \beta$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$$(\alpha') A = |\alpha - \beta| + 1$$

$$(\beta') B = \frac{|\alpha^3 - \beta^3|}{\alpha - \beta}$$

$$(\gamma') \Gamma = |3\alpha - 3\beta| + |\beta - \alpha|$$

$$(\delta') \Delta = \left| \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} \right| + \beta$$

Απάντηση

$$(\alpha') \alpha - \beta + 1$$

$$(\beta') \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

$$(\gamma') 4(\alpha - \beta)$$

$$(\delta') \alpha$$

120. Έστω ότι $x > 1$. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|x^3 - 1|}{x^2 + x + 1}$

Απάντηση $x - 1$

121. Έστω ότι $x > 5$. Να απλοποιήσετε την παράσταση $|x - 2| - 3|x - 5|$

Απάντηση $-2x + 13$

122. Έστω ότι $1 < x < 2$. Να απλοποιήσετε την παράσταση $|2x + 1| + 3(|x - 5| + x)$

Απάντηση $2x + 16$

123. Έστω ότι $x > 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$|(x - 1)(x + 1)(x - 2)| - x^3 + 2x^2 + x = 2$$

34 Απόλυτης τιμή και πράξεις

124. Για τους αριθμούς α, β, γ είναι γνωστό ότι $|\alpha| = 2, |\beta| = 4, |\gamma| = \frac{1}{2}$. Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των αριθμών:



$(\alpha') |\alpha\beta|$

$(\delta') \alpha^2 |\beta\gamma|$

$(\beta') \left| \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right|$

$(\epsilon') \left| \frac{\alpha}{|\alpha|} \right| + \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right|$

$(\gamma') |\alpha^2 \beta\gamma|$

$(\zeta') |\alpha^3| + |\beta^3| - \gamma^2$

Απάντηση:

$(\alpha') 8$

$(\delta') 8$

$(\beta') 16$

$(\epsilon') 5$

$(\gamma') 8$

$(\zeta') \frac{287}{4}$

125. Για τους αριθμούς x, y είναι γνωστό ότι $|x| < 2, |y| < 7$. Χρησιμοποιείστε την τριγωνική ανισότητα για να αποδείξετε ότι:

$(\alpha') |x + y| < 5$

$(\beta') |x + 2y| < 8$

$(\gamma') |x^2 + 2y + 1| < 11$

$(\delta') |x^3 - 2y + 4| < 18$

126. Έστω αριθμός α με $|a| < 1$.

- Να λύσετε ως προς x την εξίσωση $2(x + 3) = \alpha$
- Να αποδείξετε ότι για την λύση που βρήκατε ισχύει $|x| < \frac{7}{2}$

Απάντηση: $(\alpha') x = \frac{\alpha}{2} - 3$

127. Για τους αριθμούς A, B είναι γνωστό ότι $|A - 3| < 4$ και $|B - 4| < 3$. Να αποδείξετε ότι $|A + B - 7| < 7$.

128. Να αποδείξετε ότι αν $|x| < 3, |y| > 2$ τότε $\left| \frac{2x+1}{y^2+1} \right| < \frac{7}{5}$.

129. Έστω ότι $|x| < 4, |y| < 5$. Να αποδείξετε ότι $-69 < x^3 + y < 69$.

130. (α') Για ποιές τιμές του x ισχύει $|x + 2| = 4$;

(β') Για ποιές τιμές του x ισχύει $|x + \alpha| = \alpha^2$;

(γ') Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|x + \alpha| = \alpha^2$ τότε θα ισχύει και $|x| \leq |\alpha|(|\alpha| + 1)$

Απάντηση: $(\alpha') x = 2$ ή $x = -6$ $(\beta') x = \pm\alpha^2 - \alpha$

131. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της ρίζας τις παραστάσεις:

$(\alpha') \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2}$

$(\gamma') \sqrt{(x^2 - 3x + 2)^2} + \sqrt{x^4}$

$(\beta') \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2}$

$(\delta') \sqrt{x^2} \sqrt{x^8}$

Απάντηση:



$(\alpha') |x| + |x + 1|$

$(\beta') x + |x - 1|$

$(\gamma') |x^2 - 3x + 2| + x^2$

$(\delta') |x|x^2$

35 Η εξίσωση $|x| = \alpha$

132. Να λύσετε τις εξισώσεις

$(\alpha') |x| = 3$

$(\beta') |3x - 1| = 8, x = 3, x = -\frac{7}{3}$

$(\gamma') 5|x| - 2 = 9$

$(\delta') 7|x + 2| - 3 = -11$

$(\epsilon') 3|x|^2 - 7|x| + 2 = 0$

$(\varphi') 2|x|^2 - 3|x| - 1 = 0$

$(\zeta') x^2 - 3|x| + 1 = 0$

Απάντηση:

$(\alpha') x = 3, x = -3$

$(\beta') x = 3, x = -\frac{7}{3}$

$(\gamma') x = \frac{11}{5}, x = -\frac{11}{5}$

$(\delta') \text{ Αδύνατη}$

$(\epsilon') x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}, x = 2, x = -2$

$(\varphi') x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}, x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$

$(\zeta') x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$
 $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

36 Άλλες εξισώσεις με απόλυτες τιμές

133. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$(\alpha') |2x - 1| + |3 - x| = 7$

$(\beta') |2 + 4x| = -2x - 1$

$(\gamma') |x - 3| - |x^2 - 1| = x$

$(\delta') x + \frac{1}{|x|} = 8$

$(\epsilon') (x - |x|)(|x| - 1)(1 - |2x - 1|) = 0$

$(\varphi') |x^2 - 3x + 3| = 1$

$(\zeta') \frac{1}{x-1} - \left| \frac{x}{x-2} \right| = 1$

Απάντηση:

$(\alpha') x = \frac{11}{3}, x = -1$

$(\beta') x = -\frac{1}{2}$

$(\gamma') x = -1 - \sqrt{5}, x = \sqrt{5} - 1$

$(\delta') x = 4 - \sqrt{15}, x = 4 + \sqrt{15}, x = 4 - \sqrt{17}$

$(\epsilon') x = -1 \text{ και } \forall \epsilon x \geq 0$

$(\varphi') x = 1, x = 2,$

$(\zeta') x = \frac{4}{3}$

37 Η ανίσωση $|x| < \alpha$

134. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

$(\alpha') |x - 3| < 2 \Leftrightarrow \dots < x < \dots$

$(\beta') |x + 3| < 2 \Leftrightarrow \dots < x < \dots$

$(\gamma') |x - 8| \leq 4 \Leftrightarrow \dots \leq x \leq \dots$

$(\delta') |x + 7| > 2 \Leftrightarrow x < \dots \text{ ή } \dots < x$

Απάντηση:



$(\alpha') 1 < x < 5$

$(\beta') -5 < x < -1$

$(\gamma') 4 \leq x \leq 12$

$(\delta') x < -9 \text{ ή } -5 < x$

135. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

$(\alpha') |x| < 7 \Leftrightarrow \dots < x < \dots$

$(\delta') |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \dots \text{ ή } x \geq \dots$

$(\beta') |x| \leq 12 \Leftrightarrow \dots \leq x \leq \dots$

$(\epsilon') -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \dots$

$(\gamma') |x| > 11 \Leftrightarrow x < \dots \text{ ή } x > \dots$

$(\zeta') x < -8 \text{ ή } x > 8 \Leftrightarrow \dots > \dots$

Απάντηση:

$(\alpha') -7 < x < 7$

$(\delta') x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3$

$(\beta') -12 \leq x \leq 12$

$(\epsilon') |x| < \frac{1}{2}$

$(\gamma') x < -11 \text{ ή } x > 11$

$(\zeta') |x| > 8$

136. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$(\alpha') |x + 3| < 11$

$(\gamma') |5x - 1| < 1$

$(\beta') |5x - 1| > 4$

$(\delta') |x + 2| < |x + 3|$

Απάντηση:

$(\alpha') -14 < x < 8$

$(\gamma') 0 < x < \frac{2}{5}$

$(\beta') 1 < x \text{ ή } x < -\frac{3}{5}$

$(\delta') -\frac{5}{2} < x$

38 Άλλες ανισώσεις με απόλυτες τιμές

137. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$(\alpha') |2x - 1| + |x - 2| > 7$

$(\delta') \frac{1-|x|}{|2x-1|-3} > 1$

$(\beta') |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| > 3$

$(\epsilon') |x^2 - 3x + 2| > x - |x|$

$(\gamma') |1 - |x|| > x$

$(\zeta') |x - \frac{1}{x}| < x + |x - 2|$

Απάντηση:

$(\alpha') x < -\frac{4}{3} \text{ ή } \frac{10}{3} < x$

$(\delta') \frac{5}{3} < x < 2$

$(\beta') x < 1 \text{ ή } 3 < x$

$(\epsilon') \text{ κάθε } x \text{ είναι λύση}$

$(\gamma') x < \frac{1}{2}$

$(\zeta') -1 - \sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{2} \text{ ή } \sqrt{2} - 1 < x$

39 Σύνολα και πράξεις συνόλων

138. Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, -1, 3, 4\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

$(\alpha') A \cap B$

$(\gamma') A - B$

$(\beta') A \cup B$

$(\delta') (A \cap B) - A$

Απάντηση:



$$\begin{array}{ll} (\alpha') \{1, 3\} & (\gamma') \{2\} \\ (\beta') \{-1, 1, 2, 3, 4\} & (\delta') \emptyset \end{array}$$

139. Να υπολογίσετε τα παρακάτω σύνολα:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') (\{a, b, c\} \cup \{a, c, r\}) \cap \{a, x, c\} \\ (\beta') (\{a, b, c, d\} \cup \{b, c, d, e\}) \cup \emptyset \\ (\gamma') \{1, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \cup \{1, 2, 3\} \\ (\delta') \{1, 2, \sqrt{3}\} \cap \{1, 3, \sqrt{4}\} \\ (\epsilon') (\{a, b, c, d\} - \{a, c, e\}) - \{a\} \\ (\zeta') (\{1, x, 3, 4\} \cup \{x, \frac{2}{2}, 3\}) - \{1, x\} \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') \{a, c\} & (\delta') \{1, 2\} \\ (\beta') \{a, b, c, d, e\} & (\epsilon') \{b, d\} \\ (\gamma') \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{1, 2\}\} & (\zeta') \{3, 4\} \end{array}$$

140. Να γράψετε τα σύνολα των ακεραίων λύσεων των παρακάτω ανισώσεων

$$\begin{array}{ll} (\alpha') x^2 - 10x + 16 < 0 & (\gamma') 3x^2 - 25x + 8 \leq 0 \\ (\beta') \frac{x-1}{x+8} < 0 & (\delta') |x - 1| < 3 \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') \{3, 4, 5, 6, 7\} & (\gamma') \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ (\beta') \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\} & (\delta') \{-1, 0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

141. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις μεταξύ διαστημάτων:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') (1, 7) \cup (5, 10) & (\gamma') [6, 12] - (9, 10) \\ (\beta') (1, 8) \cap (2, 10) & (\delta') (2, 19) - [10, 12] \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') (1, 10) & (\gamma') [6, 9] \\ (\beta') (2, 8) & (\delta') (2, 10) \cup (12, 19) \end{array}$$

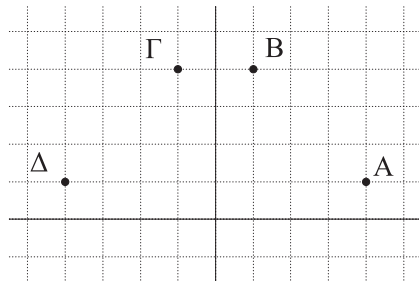
40 Απόσταση δύο σημείων του επιπέδου

142. Να παραστήσετε στο επίπεδο τα παρακάτω σημεία

$$\begin{array}{ll} (\alpha') A(4, 1) & (\gamma') \Gamma(-1, 4) \\ (\beta') B(1, 4) & (\delta') \Delta(-4, -1) \end{array}$$

Απάντηση:





143. Να βρείτε για ποια τιμή του x τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, x)$ έχουν απόσταση 4.

Απάντηση: $x = 2 + 2\sqrt{3}$, $x = 2 - 2\sqrt{3}$

144. Να βρείτε για πως πρέπει να επιλεγεί το B ώστε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(x, y)$, $\Gamma(4, 1)$, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου

Απάντηση: $B\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ ή $B\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

41 Η έννοια της συνάρτησης

145. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Να γράψετε τα:

(α') $f(2)$	(γ') $f\left(\frac{1}{2}\right)$	(ε') $f(x+2)$
(β') $f(-1)$	(δ') $f(\sqrt{2})$	(ϛ') $f(x-2)$

Απάντηση:

(α') 11	(γ') $\frac{11}{4}$	(ε') $x^2 + 7x + 11$
(β') -1	(δ') $3 + 3\sqrt{2}$	(ϛ') $x^2 - x - 1$

146. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Να γράψετε τα:

(α') $f(2)$	(γ') $f(x+4)$	(ε') $f(3x)$
(β') $f(-5)$	(δ') $f(4-x)$	(ϛ') $f\left(\frac{x}{3}\right)$

Απάντηση:

(α') 3	(γ') $\frac{x+5}{x+3}$	(ε') $\frac{3x+1}{3x-1}$
(β') $\frac{2}{3}$	(δ') $\frac{x-5}{x-3}$	(ϛ') $\frac{x+3}{x-3}$

147. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^2 + x(x - \alpha)$. Να βρείτε τον α ώστε να ισχύει $g(5) = 5$.

Απάντηση: $\alpha = 9$

148. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 + \lambda x$. Να επαληθεύσετε την ισότητα: $g(\lambda + 1) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$

149. Για ποια τιμή του t το σημείο $M(3t + 1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$;

Απάντηση: $t = -\frac{19}{15}$



150. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) + f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

151. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\begin{array}{lll} (\alpha') f(x) = \frac{x-1}{x+1} & (\delta') f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+3x+3} & (\tau') f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \\ (\beta') f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2} & & \\ (\gamma') f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+3} & (\epsilon') f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} & \end{array}$$

Απάντηση:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') \mathbb{R} - \{-1\} & (\gamma') \mathbb{R} & (\epsilon') x < -2 \text{ ή } 1 \leq x \\ (\beta') \mathbb{R} - \{-1, -2\} & (\delta') [1, +\infty) & (\tau') 1 \leq x \leq 5 \end{array}$$

42 Γραφική παράσταση συναρτήσεων

152. Με την βοήθεια της Geogebra να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') f(x) = 3x & (\delta') f(x) = x^3 \\ (\beta') f(x) = \frac{3}{x} & (\epsilon') f(x) = 3x + 4 \\ (\gamma') f(x) = x^2 & (\tau') f(x) = -3(x + 4) \end{array}$$

Απάντηση: Να δώσετε σύμφωνα με τις οδηγίες:

$$\begin{array}{lll} (\alpha') y = 3x & (\gamma') y = x^2 & (\epsilon') y = 3x + 4 \\ (\beta') y = \frac{3}{x} & (\delta') y = x^3 & (\tau') y = -3(x + 4) \end{array}$$

153. Με την βοήθεια της Geogebra να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') f(x) = \frac{x+2}{x-3} & (\gamma') f(x) = x^3 - 2x \\ (\beta') f(x) = x^2 + 3x + 3 & (\delta') f(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{x}} \end{array}$$

Απάντηση: Να δώσετε σύμφωνα με τις οδηγίες:

$$\begin{array}{ll} (\alpha') y = \frac{(x+2)}{(x-3)} & (\gamma') y = x^3 - 2x \\ (\beta') y = x^2 + 3x + 3 & (\delta') y = \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \end{array}$$

43 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης

154. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες



$$\begin{aligned} (\alpha') f(x) &= x^2 + |x| + 1 & (\gamma') f(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \\ (\beta') f(x) &= x^2 - |x| - 1 & (\delta') f(x) &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \end{aligned}$$

155. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

$$\begin{aligned} (\alpha') f(x) &= x|x| \\ (\beta') f(x) &= x^3 + \frac{1}{x} \\ (\gamma') f(x) &= x(x^2 - 1) + x^3(x^4 - 1) \\ (\delta') f(x) &= x(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

156. Έστω $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

$$\begin{aligned} (\alpha') \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}(2x^2 - 3)^2 \\ (\beta') \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) &\geq -\frac{1}{4} \\ (\gamma') \text{ Να αποδείξετε ότι } f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{1}{4} \\ (\delta') \text{ Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της } f &\text{ είναι το } -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

157. Έστω $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

- (α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 (β') Να αποδείξετε ότι αν τα x_1, x_2 είναι διάφορα μεταξύ τους και διάφορα του 2 τότε ισχύει $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$.
 (γ') Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
 (δ') Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(-\infty, 2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Απάντηση: (α) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

44 Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$

158. Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $y = 3x - 1$, $y = 4x + 5$.

Απάντηση: $M(-6, -19)$

159. Για ποια τιμή του λ το σημείο $A(2, \lambda + 1)$ ανήκει στην ευθεία $y = 4x - 1$;

Απάντηση: $\lambda = 6$

160. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = 3x + 2$ τέμνει τους άξονες.

Απάντηση: Τον x' στο $A(-\frac{2}{3}, 0)$ τον y' στο $B(0, 2)$.

161. (α') Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = 5x - 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της $y = 2x^2$.

(β') Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στην Geogebra και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε.

Απάντηση: $A(1, 2)$, $B(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

162. Να βρείτε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, -5)$

Απάντηση: $y = -\frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$



163. Να βρείτε την ευθεία $y = ax + \beta$ αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, -5)$
 Απάντηση: $y = -\frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$
164. Να βρείτε την ευθεία $y = ax + \beta$ αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο και $A(1, 2)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60°
 Απάντηση: $y = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}$
165. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.
- (α') Να αποδείξετε ότι είναι άρτια.
- (β') Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$
- (γ') Να παραστήσετε την ευθεία και την συνάρτηση με την Geogebra.
- Απάντηση: (β') $y = 6x + 9$

45 Παράλληλες και κάθετες ευθείες

166. Να βρείτε για ποια τιμή του t η ευθεία $y = (4 - 2t)x + 1$ είναι παράλληλα με την ευθεία $y = 3x - 2$.
 Απάντηση: $t = \frac{1}{2}$
167. Να βρείτε για ποια τιμή του t οι ευθείες $y = (2t + 4)x + 4$, $y = 3t - 1$ είναι κάθετες.
 Απάντηση: $t = -\frac{13}{6}$
168. Να βρείτε την ευθεία $y = ax + \beta$ αν είναι γνωστό ότι:
- Διέρχεται από το σημείο $P(1 - 3)$, και
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 4$
- Απάντηση: $y = -3x$
169. Να βρείτε την ευθεία $y = ax + \beta$ αν είναι γνωστό ότι:
- Διέρχεται από το σημείο $P(2, 4)$, και
 - Είναι κάθετη στην ευθεία $y = 8x + 3$
- Απάντηση: $y = -\frac{1}{8}x + \frac{21}{4}$

46 Οι συναρτήσεις $y = ax^2$ και $y = \frac{\alpha}{x}$

170. Με την βοήθεια της Geogebra να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
- (α') $f(x) = 2x^2$
- (β') $f(x) = -2x^2$
- (γ') $f(x) = 4x^2$
- (δ') $f(x) = -4x^2$
- (ε') $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



$$(\varepsilon') f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

171. Με την βοήθεια της Geobebra να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$(\alpha') f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(\beta') f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$(\gamma') f(x) = \frac{2}{x}$$

$$(\delta') f(x) = \frac{-2}{x}$$

47 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$

172. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(\alpha') f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$(\beta') f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$(\gamma') f(x) = (x - 1)(x + 3)$$

$$(\delta') f(x) = (x + 2)^2 - 5$$

- Να γίνει στην Geobebra η γραφική της παράσταση.
- Να βρεθεί η διακρίνουσα, οι ρίζες (εφ' όσον υπάρχουν)
- Τα διαστήματα μονοτονίας και το μέγιστο ή ελάχιστο

48 Μέγιστα και Ελάχιστα

173. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $(x - 2)(5 - x)$

Απάντηση: $\frac{9}{4}$ για $x = \frac{7}{2}$

174. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $x + \frac{2}{x}$

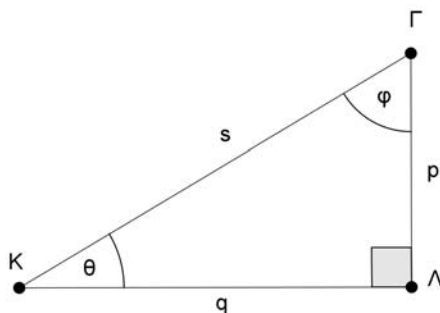
Απάντηση: $2\sqrt{2}$ για $x = \sqrt{2}$

175. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $x + \frac{2}{x}$ όταν $x > 0$.

Απάντηση: $2\sqrt{2}$ για $x = \sqrt{2}$

49 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

176. Στο σχήμα το τρίγωνο ΚΛΓ είναι ορθογώνιο.



Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu\theta$	$\epsilon\varphi\theta$	$\eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu\varphi$	$\epsilon\varphi\varphi$

Απάντηση:

$\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu\theta$	$\epsilon\varphi\theta$	$\eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu\varphi$	$\epsilon\varphi\varphi$
$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{s}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{s}$	$\frac{q}{p}$

177. Αν για μία οξεία γωνία x είναι $\eta\mu x = \frac{1}{3}$ να βρεθεί το $\sigma\upsilon\nu x$.

Απάντηση: $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

178. Αν για μία οξεία γωνία y είναι $\epsilon\varphi y = 2$ να βρεθεί το $\eta\mu x$

Απάντηση: $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

179. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\eta\mu \frac{\pi}{6} + \epsilon\varphi \frac{\pi}{3}}$

Απάντηση: $\frac{\sqrt{2}+1}{1+2\sqrt{3}}$

180. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\eta\mu \frac{\pi}{6} + \epsilon\varphi \frac{\pi}{3}}$

Απάντηση: $\frac{\sqrt{2}+1}{1+2\sqrt{3}}$

181. Να αποδείξετε ότι για κάθε οξεία γωνία φ ισχύει $\frac{\eta\mu\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\varphi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{2}{\eta\mu\varphi}$.

182. Να αποδείξετε ότι για κάθε οξεία γωνία φ ισχύει $\frac{1}{1+\eta\mu^2\varphi} - \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = -\frac{1}{2-3\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^4\varphi}$

50 Τριγωνομετρικοί αριθμοί πραγματικού αριθμού

183. Να βρείτε σε ποιά τεταρτημόριο βρίσκονται οι γωνίες

(α') $\frac{\pi}{12}$

(β') $\frac{3\pi}{4}$

(γ') $\frac{49\pi}{6}$

(δ') $-\frac{2\pi}{3}$

Απάντηση:

(α') 1ο

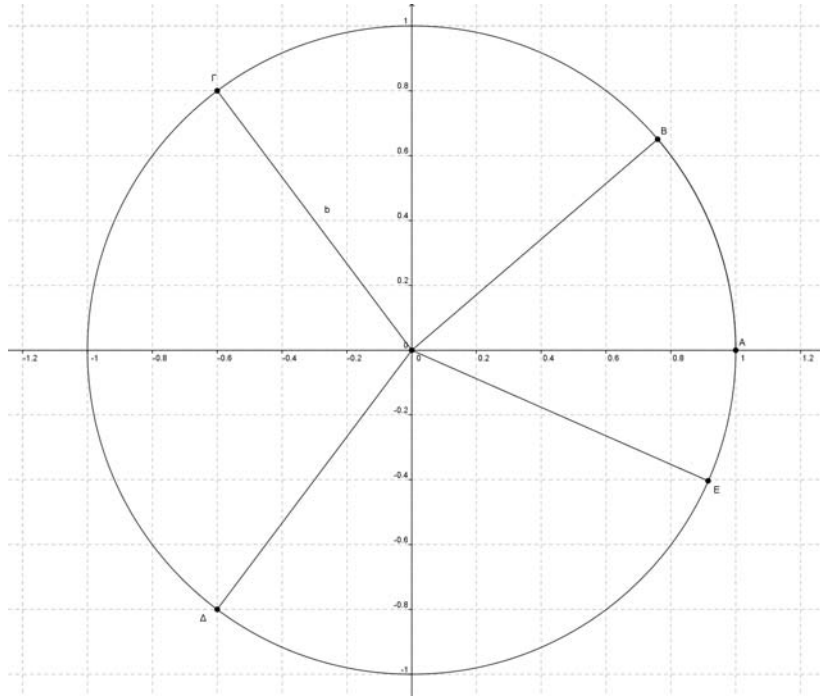
(β') 2ο

(γ') 1ο

(δ') 3ο

184. Στο σχήμα που ακολουθεί να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αριθμών που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε του τριγωνομετρικού κύκλου.





51 Υπολογισμοί με τριγωνομετρικούς αριθμούς

185. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{3\pi}{4}$.

Απάντηση: $\eta\mu \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -1$

186. Μία γωνία βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο και έχει ημίτονο ίσο με $\eta\mu x = -\frac{1}{4}$.
Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της.

Απάντηση: $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$, $\epsilon\varphi x = \frac{1}{15}\sqrt{15}$

187. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Απάντηση: $\frac{9}{16}$

188. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\eta\mu\left(\frac{22\pi}{5}\right) - \eta\mu\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \eta\mu\left(\frac{43\pi}{5}\right) - \eta\mu\left(\frac{13\pi}{5}\right)$

Απάντηση: 0

189. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{\eta\mu \frac{13\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{14\pi}{4}\right)}{\epsilon\varphi\left(\frac{19\pi}{3}\right) + \sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{4}\right)}$

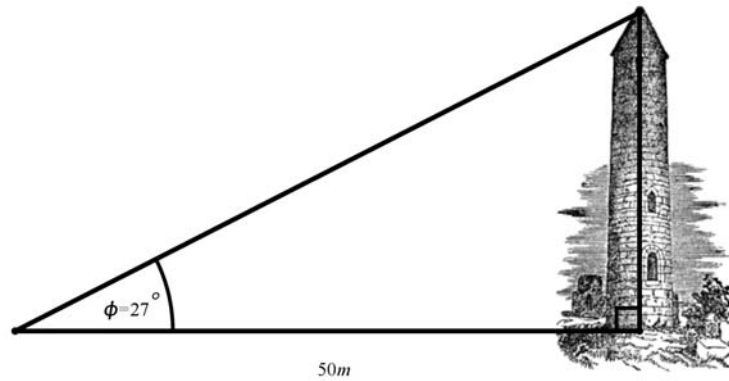
Απάντηση: $\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}$

190. Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x}$. Να βρείτε τα $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Απάντηση: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{3})$, $\frac{1}{8}(3 + \sqrt{3})$.

191. Στο σχήμα που ακολουθεί να υπολογίσετε το ύψος του πύργου.





Απάντηση: Περίπου 25,5 m

52 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

192. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\theta} = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\varepsilon\varphi\omega}$
193. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x \eta\mu^2 x$.
194. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$.
195. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$.
196. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\varepsilon\varphi(\pi-x) \sigma\upsilon\nu(2\pi+x) \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)}{\eta\mu(\pi+x) \sigma\upsilon\nu(-x) \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-x)} = -1$
197. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (1 + \varepsilon\varphi x) (1 + \sigma\varphi x) = 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$



Περιεχόμενα

1	Οι τέσσερις πράξεις στο \mathbb{R}	1
2	Δυνάμεις	1
3	Αναλογίες	2
4	Ταυτότητες	3
5	Μετατροπή σε γινόμενο παραγόντων	3
6	Απλοποίηση Κλασμάτων	4
7	Επίλυση της εξίσωσης $ax + b = 0$	5
8	Εξισώσεις που ανάγονται στην $ax + b = 0$	6
9	Η διάταξη στο \mathbb{R}	6
10	Διαστήματα στο \mathbb{R}	7
11	Διάταξη και πράξεις	7
12	Ανισώσεις της μορφής $ax + b > 0$	8
13	Ανισώσεις που ανάγονται στην $ax + b > 0$	9
14	Τετραγωνικές Ρίζες	10
15	Τετραγωνικές ρίζες και πράξεις	11
16	Η εξίσωση $x^2 = \alpha$	11
17	Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$	12
18	Εξισώσεις που ανάγονται στην $ax^2 + bx + \gamma = 0$	13
19	Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0$	14
20	Ανισώσεις που ανάγονται στην $ax^2 + bx + \gamma > 0$	16
21	Άθροισμα και γινόμενο ριζών της $ax^2 + bx + \gamma = 0$	16
22	Κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τις ρίζες της	17
23	Πρόσημο ριζών της $ax^2 + bx + \gamma = 0$	17
24	Ρίζες ανώτερης τάξης	18
25	Ρίζες ανώτερης τάξης και πράξεις	18
26	Η εξίσωση $x^N = \alpha$	19
27	Ορίζουσες 2×2	20
28	Συστήματα α' βαθμού με δύο αγνώστους	20
29	Συστήματα α' βαθμού με περισσότερους από δύο αγνώστους	21
30	Συστήματα που ανάγονται σε συστήματα α' βαθμού.	22
31	Συστήματα β' βαθμού ή ανωτέρου	22
32	Επίλυση σχέσεων	23
33	Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών. Η έννοια της απόλυτης τιμής	23
34	Απόλυτης τιμή και πράξεις	24
35	Η εξίσωση $ x = \alpha$	26
36	Άλλες εξισώσεις με απόλυτες τιμές	26
37	Η ανίσωση $ x < \alpha$	26
38	Άλλες ανισώσεις με απόλυτες τιμές	27
39	Σύνολα και πράξεις συνόλων	27
40	Απόσταση δύο σημείων του επιπέδου	28
41	Η έννοια της συνάρτησης	29
42	Γραφική παράσταση συναρτήσεων	30
43	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης	30
44	Η ευθεία $y = ax + b$	31
45	Παράλληλες και κάθετες ευθείες	32



46 Οι συναρτήσεις $y = ax^2$ και $y = \frac{a}{x}$	32
47 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$	33
48 Μέγιστα και Ελάχιστα	33
49 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας	33
50 Τριγωνομετρικοί αριθμοί πραγματικού αριθμού	34
51 Υπολογισμοί με τριγωνομετρικούς αριθμούς	35
52 Τριγωνομετρικές ταυτότητες	36

