Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φυλλο 19, 20 Μαΐου 2018
ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Μαθηματικός, MSc, PhD
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
mavrogiannis@gmail.com

Τα δύο θεωρήματα αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα. Προσεγγίζοντας διδακτικά το σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου.

Φάνης Μαργαρώνης

1 Εισαγωγή.

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι να παρουσιάσει τα δύο θεωρήματα για την αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα και ταυτόχρονα να κάνει μια διδακτική προσέγγιση σε αυτά, με άξονα τις ασκήσεις και τον τρόπο παρουσίασης του σχολικού βιβλίου της Γ' Λυκείου.

Το 1ο θεώρημα είναι στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου και στην ύλη των πανελληνίων εξετάσεων. Όμως παρουσιάζεται ως σχεδόν «μηχανική» αλλαγή της μεταβλητής, χωρίς ιδιαίτερη εμβάθυνση, ενώ εστιάζει ετεροβαρώς στους δύο δυνατούς τρόπους εφαρμογής του θεωρήματος. Ως «μηχανική» εφαρμογή (επειδή θα αναφερθεί αρκετές φορές στο εξής) εννοούμε την εφαρμογή που δεν βασίζεται σε ουσιαστική γνώση των θεωρημάτων, αλλά σε μια τυπική αναπαραγωγή μιας εξωτερικής προέλευσης μεθοδολογίας.

Το 2ο θεώρημα είναι εκτός σχολικής ύλης, παρ' όλα αυτά θα παρουσιάσουμε σύντομα περιπτώσεις που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επειδή αφενός έχει κάποιο ενδιαφέρον και συμπληρώνει το πλαίσιο που έχει να κάνει με την αλλαγή μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, αφετέρου επειδή θα το χρειαστούμε όταν επιχειρήσουμε να δώσουμε μια ερμηνεία για ορισμένη λανθασμένη χρήση του 1ου θεωρήματος.

Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το θέμα με παραδείγματα, ρίχνοντας παράλληλες ματιές στο σχολικό βιβλίο. Θα προτείνουμε σκέψεις για τη διδακτική αξιοποίηση των θεωρημάτων και θα εστιάσουμε σε ορισμένα «θολά» σημεία που συχνά συναντάμε. Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο θεώρημα που αντικειμενικά μας αφορά περισσότερο, λόγω εξεταστέας ύλης.

2 Το πρώτο θεώρημα.

Θεωρημα 1. Έστω συνάρτηση g ορισμένη και συνεχώς παραγωγίσιμη (υπάρχει η g' και είναι συνεχής) σε ένα διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$. Έστω επίσης μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $g(\Delta)$. Τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

Αποδειξη Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$, οπότε το $g(\Delta)=g([\alpha,\beta])$ θα είναι κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, ως συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Επίσης η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $g(\Delta)$, οπότε ορίζεται παράγουσα συνάρτηση της f, έστω F, ώστε $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in g(\Delta)$. Τότε θα είναι:

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=$$

$$\int_\alpha^\beta F'(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_\alpha^\beta [F(g(x))]'dx=$$

$$[F(g(x))]_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha)) \quad (1).$$

Επίσης:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} F'(x)dx=$$

$$[F(x)]_{g(\alpha)}^{g(\beta)}=F(g(\beta))-F(g(\alpha)) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη :

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

Παρατηρηση 1. **Α.** Δεν απαιτείται η g να είναι 1-1. Εδώ γίνεται σύγχυση συχνά με το 2ο θεώρημα, στο οποίο θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Β. Η αλλαγή μεταβλητής μπορεί να λειτουργήσει είτε «από το πρώτο στο δεύτερο μέλος», είτε αντίστροφα. Έχει σημασία πώς αντιλαμβανόμαστε το εκάστοτε προς υπολογισμό ολοκλήρωμα. Αν είναι, δηλαδή, το πρώτο ή το δεύτερο μέλος της ισότητας του θεωρήματος. Θα γίνει σαφές στα παραδείγματα.

Γ. Συχνά η ισότητα γράφεται και ως εξής:

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du,$$

ώστε να είναι σαφέστερη η αλλαγή μεταβλητής. Με αυτή τη μορφή βρίσκεται και στο σχολικό βιβλίο.

Παραδειγμα 1. Ας πάρουμε το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx.$$

Θα θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα ως το πρώτο μέλος της ισότητας. Επίσης θεωρούμε ότι $g(x) = \sqrt{x}$, συνεχής στο $\Delta = \left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right]$, με συνεχή πρώτη παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ στο Δ, άρα g γνησίως αύξουσα. Τότε η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, συνεχής και ορισμένη, στο

$$\mathrm{g}(\Delta) = \left[g\left(\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right)\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

προκύπτει, πράγματι το $f(g(x)) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$, αλλά δεν έχουμε το $g'(x)$, ώστε να σχηματιστεί το πρώτο μέρος της ισότητας. Όμως το ολοκλήρωμα I μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$I = \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} 2\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Τελικά θεωρούμε :

- $g(x) = \sqrt{x}$, συνεχής στο $\Delta = \left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right]$, με συνεχή πρώτη παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, άρα g : γνησίως αύξουσα, οπότε $\mathrm{g}(\Delta) = \left[g\left(\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right)\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $f(x) = 2x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, συνεχής και ορισμένη στο $g(\Delta)$.

Οπότε το I γίνεται της μορφής $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx$. Τότε από το θεώρημα θα είναι :

$$I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$... = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right).$$

3 Λάθη (και «λάθη») που γίνονται κατά τη «μηχανική» αλλαγή μεταβλητής.

Για το $\mathrm{I} = \int\limits_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$ με.. «όρους σχολικού βιβλίου» και δεδομένη την ισότητα

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du,$$

συναντάμε τα εξής συνηθισμένα λάθη (ή «λάθη»):

- Θέτουμε $u = \sqrt{x}$ (1), εννοώντας ότι $u = g(x) = \sqrt{x}$, όμως εδώ συχνά παραλείπεται ο έλεγχος αν η $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο Δ.
- Με δεδομένο τότε ότι θα είναι $f(g(x)) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$, έχουμε την $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για την οποία συχνά δεν εξετάζουμε αν είναι, πράγματι, συνεχής στο $g(\Delta)$.
- Τότε συχνά λέμε $u^2 = x$ (2), εννοώντας βέβαια ότι $u = g(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = g^{-1}(u) = u^2$, χωρίς να εξετάζουμε αν η g είναι 1-1, κάτι το οποίο ούτως ή άλλως ΔΕΝ χρειάζεται ως προϋπόθεση, όμως μπαίνοντας στη διαδικασία επίλυσης προκύπτει ως απαίτηση. Εδώ ακριβώς είναι που προκύπτει και η παρανόηση για την υποτιθέμενη απαίτηση του 1-1 για τη g.
- Έχουμε δει, επίσης, το εξής λάθος στα διαφορικά: Να πάρουμε από την (1): $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{x}du = dx$, ώστε να αντικατασταθεί το dx στο ολοκλήρωμα, ως: $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu u\cdot 2\sqrt{x}du \overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu u\cdot 2udu$, το οποίο ασφαλώς είναι ανεπίτρεπτο. Η μορφή $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu u\cdot 2\sqrt{x}du$ είναι ολοκλήρωμα δύο μεταβλητών και είναι ίσο με $2\sqrt{x}\cdot\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu u du = 2\sqrt{x}(\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha)$, το οποίο φυσικά είναι μια συνάρτηση του x και όχι πραγματικός αριθμός.
- Άλλο συνηθισμένο γεγονός σε σχέση με τα διαφορικά, είναι να συνεχίσουμε από την (2) ως εξής : $2udu = dx$, όπου όμως οδηγούμαστε τελείως μηχανικά στην τελευταία ισότητα. Γνώμη μας είναι ότι μια τέτοια χρήση δε βοηθάει το μαθητή να καταλάβει την παραγώγιση σε σύνδεση με την ολοκλήρωση.

Ειδικά για τη συγκεκριμένη επίλυση, θα μπορούσαμε, (πέραν των απαραίτητων περιορισμών και μαζί με τα κατάλληλα σχόλια) να την παρουσιάζουμε ως εξής: Έχω $x = u^2$ άρα $\frac{dx}{du} = 2u$, οπότε $dx = 2udu$. Ειδικά αν έχουμε νωρίτερα αναφερθεί στην έννοια της αντιπαραγώγισης και στη σύνδεση του ολοκληρώματος με την παράγωγο, οι μαθητές αφομοιώνουν πιο ολοκληρωμένα την παραπάνω διαδικασία.

- Για τα όρια, λέμε:
  - για $x = \frac{\pi^2}{9}$ είναι $u = \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3}$
  - για $x = \frac{\pi^2}{4}$ είναι $u = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$

  Δεν γίνεται κατανοητό, όμως βαθύτερα, πώς προκύπτουν τα όρια αυτά, ενώ αν η εξίσωση έχει πάνω από μία λύσεις τότε προκύπτει σύγχυση για τους μαθητές. Θα δούμε και αντίστοιχο παράδειγμα στη συνέχεια.

- Μετά τα παραπάνω, αντικαθιστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα και προκύπτει:

  $$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu u\cdot 2udu = ... = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right).$$

  Καταλήγουμε, δηλαδή, στο ίδιο ολοκλήρωμα με αυτό του παραδείγματος 1, αλλά με ένα θησαυρό γνώσης να έχει παρακαμφθεί στην πορεία.

Παρατηρηση 2. Αν στο προηγούμενο ολοκλήρωμα αλλάξουμε τα όρια και πάρουμε το $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$, θα διαπιστώσουμε ότι η $g(x) = \sqrt{x}$ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ (αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0) , οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα με αυτή την αντικατάσταση «από αριστερά προς τα δεξιά». Γι᾽ αυτό και χρειάζεται ο έλεγχος των προϋποθέσεων. Σημειώνουμε, βέβαια, ότι δεν υπάρχει αντίστοιχη ειδική περίπτωση στις εντός ύλης ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.

Παραδειγμα 2. Επιστρέφουμε στο

$$I = \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx.$$

Μόνο που αυτή τη φορά θα θεωρήσουμε το I ως το δεύτερο μέλος της ισότητας. Για λίγο ακόμα (στα αμέσως επόμενα παραδείγματα) θα επιμείνουμε σε αυτή τη χρήση του θεωρήματος, δηλαδή ειδικά στη χρήση του «από δεξιά προς τα αριστερά», μιας και όχι μόνο προκαλεί τις περισσότερες συγχύσεις, αλλά συχνά παραμένει άγνωστη.
Τώρα, για το I: έχουμε $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$, ορισμένη και συνεχής στο $\left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right]$. και θέλουμε μια $g(x)$ τέτοια, ώστε:

1. να είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$
2. όπου $g(a) = \frac{\pi^2}{9}$, $g(\beta) = \frac{\pi^2}{4}$
3. να έχει συνεχή παράγωγο στο Δ
4. το $g(\Delta)$ να είναι διάστημα στο οποίο η fείναι συνεχής.
5. (το τελικό ζητούμενο) να απλοποιήσει το I.

Η καλύτερη επιλογή είναι μάλλον η

$$g(x) = x^2 \text{ με } g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}, \text{ και } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις, δηλαδή είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, με συνεχή παράγωγο $g'(x) = 2x > 0$ στο Δ, άρα g γνησίως αύξουσα κι έτσι

$$g(\Delta) = g\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right],$$

ενώ η $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $g(\Delta)$. Τότε έχουμε ξεκάθαρη τη μορφή $I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$, οπότε θα είναι

$$I = \int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x^2) \cdot (x^2)'dx =$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x \cdot 2xdx = \ldots = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right).$$

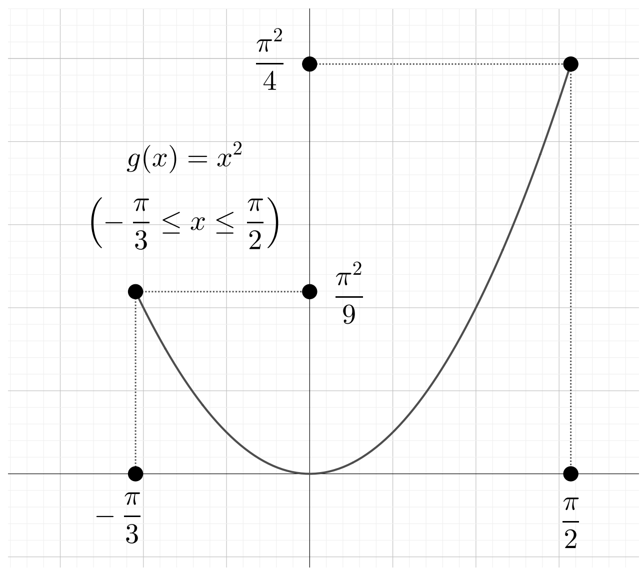
Παρατηρηση 3. Αν βρίσκαμε κάποια άλλα α και β , με $g(a) = \frac{\pi^2}{9}$, $g(\beta) = \frac{\pi^2}{4}$, αλλά το $g(\Delta)$ ΔΕΝ ταυτιζόταν με το $\left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right]$ δεν θα είχαμε κανένα πρόβλημα, εφόσον ικανοποιούνταν οι υπόλοιπες προϋποθέσεις. Το θεώρημα απαιτεί μόνο τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Μην ξεχνάμε βέβαια ότι πρέπει η f να είναι συνεχής ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΟ το $g(\Delta)$. Ας δούμε το επόμενο παράδειγμα σχετικά.

Παραδειγμα 3. Μελετάμε το ίδιο ολοκλήρωμα,

$$I = \int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx,$$

με τον τρόπο του Παραδείγματος 2, δηλαδή από δεξιά προς τα αριστερά, μόνο που θα επιλέξουμε άλλο διάστημα για τη g. Θεωρούμε: $g(x) = x^2$, με $g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις, δηλαδή είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, με συνεχή παράγωγο $g'(x) = 2x$. Μάλιστα η g' όχι μόνο μηδενίζει στο $0 \in \Delta$, μα αλλάζει και πρόσημο, που σημαίνει ότι η g ΔΕΝ είναι 1-1.

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{\pi^2}{9}$	$\searrow$	$g(0)=0$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$



Ωστόσο η $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο

$$g(\Delta) = g\left(\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right] \supset \left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{\pi^2}{4}\right].$$

Επομένως έχουμε:

$$I = \int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/2} f(x^2) \cdot (x^2)'dx =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x \cdot 2x dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right).$$

Παρατηρηση 4. **Α.** Μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε g θέλουμε, αρκεί να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. Δεν είναι απαραίτητο η g να είναι μοναδική. Θα δούμε στη συνέχεια το παράδειγμα 4 σχετικά.

Β. Είδαμε ότι $g(\Delta) = g([\alpha,\beta]) \supset [g(\alpha), g(\beta)]$ (ή $[g(\beta), g(\alpha)]$). Κανένα πρόβλημα δεν προκύπτει με αυτό. Μοναδική απαίτηση του θεωρήματος σε σχέση με το $g(\Delta)$ είναι η f να είναι συνεχής σε αυτό.

Γ. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζεται το

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$$

που συναντήσαμε στην Παρατήρηση του Παραδείγματος 1, όπου δεν μπορούσαμε να το υπολογίσουμε «από αριστερά προς τα δεξιά» (τότε με τη $g(x) = \sqrt{x}$). Θεωρώντας το ολοκλήρωμα ως το 2ο μέλος της ισότητας του Θεωρήματος, παίρνουμε $g(x) = x^2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με συνεχή παράγωγο $g'(x) = 2x$, ενώ η $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$: ορισμένη και συνεχής στο $g(\Delta) = \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$. Επομένως θα είναι:

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2} \cdot 2x dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu|x| \cdot 2x dx \overset{x\geq 0}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot 2x dx = \ldots$$

Παραδειγμα 4. Ας δούμε σύντομα ένα ολοκλήρωμα παρόμοιας μορφής με αυτό των προηγούμενων παραδειγμάτων, το

$$J = \int_1^{e^2} \ln\sqrt{x}dx.$$

Θα το θεωρήσουμε ως το 2ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος και στις δύο ακόλουθες προσεγγίσεις θα επιλέξουμε διαφορετικές συναρτήσεις $g(x)$.

1η προσέγγιση

Έστω η $g(x) = x^2$, με $g'(x) = 2x$, συνεχείς στο $\Delta = [1, e]$, με $g(\Delta) = [1, e^2]$. Και $f(x) = \ln\sqrt{x}$ συνεχής στο $g(\Delta)$. Θα είναι:

$$J = \int_1^{e^2} \ln\sqrt{x}dx = \int_1^{e} f(x^2) \cdot 2x dx =$$

$$\int_1^{e} \ln x \cdot 2x dx = \ldots = \frac{e^2+1}{2}$$

2η προσέγγιση

Θεωρούμε τη $g(x) = e^{2x}$, $g'(x) = 2e^{2x}$, συνεχείς στο $\Delta = [0, 1]$, με $g(\Delta) = [1, e^2]$. Και $f(x) = \ln\sqrt{x}$ συνεχής στο $g(\Delta)$. Θα είναι:

$$J = \int_1^{e^2} \ln\sqrt{x}dx = \int_0^{1} f(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} dx =$$

$$\int_1^{e} \ln\sqrt{e^{2x}} \cdot 2e^{2x} dx = \int_1^{e} x \cdot 2e^{2x} dx = \ldots = \frac{e^2+1}{2}.$$

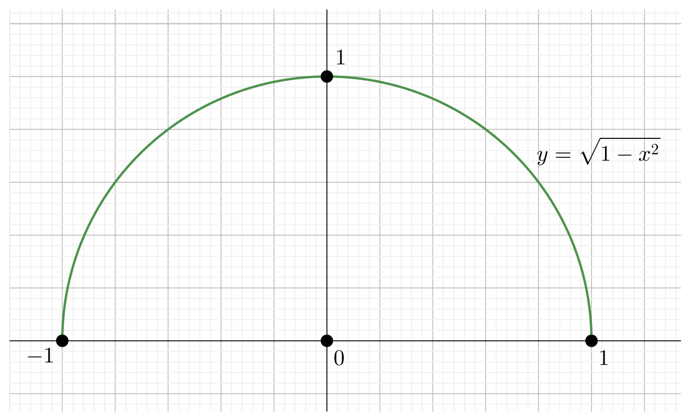
Συμφωνούμε ότι η 2η προσέγγιση είναι πιο ατυχής από την 1η, αλλά δείχνει ότι δεν υπάρχει απαραίτητα μοναδική g που μπορεί να λειτουργήσει προς όφελός μας. Θα επιστρέψουμε τώρα στην οπτική του σχολικού βιβλίου.

Παραδειγμα 5. Ας δούμε το ολοκλήρωμα

$$K = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Ακολουθώντας τη «μηχανική» αντικατάσταση, θα πέσουμε σε μια φοβερή αντίφαση:

Θέτουμε $u = x^2$, άρα για $x = -1$ είναι $u = 1$, και για $x = 1$ είναι επίσης $u = 1$; Άρα Μήπως $K = 0$; Όχι βέβαια. Είναι $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ στο $[-1, 1]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στα άκρα, άρα πρέπει το ολοκλήρωμά μας να είναι οπωσδήποτε θετικό.



Τι συμβαίνει εδώ;

Γιατί ΔΕΝ μπορούμε να προχωρήσουμε με τη $g(x) = x^2$;

- Ας υποθέσουμε ότι το K είναι το πρώτο μέλος της ισότητας του θεωρήματος. Μπορεί το K να γραφτεί στη μορφή

$$K = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g\prime(x) dx \quad ;$$

Δηλαδή, αφού $g(x) = x^2$, μπορεί να γραφτεί ως

$$K = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot 2x dx \quad ;$$

Όχι, γιατί προκύπτουν τα εξής προβλήματα:
i. Ο παρονομαστής μηδενίζει, άρα η συνάρτηση $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$ δεν ορίζεται στο $[-1, 1]$.

ii. Ακόμα και αν δεν ήταν στον παρονομαστή, θα έπρεπε το $2x$ να εκφραστεί σε σχέση με το $u = g(x) = x^2$, ώστε να πάρω την $f(g(x))$. Δηλαδή θέλουμε λύση ως προς x για την εξίσωση: $u = x^2$, με $x \in [-1,1]$, όμως η $g(x) = x^2$ ΔΕΝ είναι 1-1 στο $[-1,1]$. Σημειώνουμε ξανά ότι το 1-1 ΔΕΝ είναι προαπαιτούμενο για τη g, αλλά προκύπτει ως ανάγκη κατά την επίλυση, με τη συγκεκριμένη επιλογή για τη g.

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι το K είναι το 2ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος.

  Θέλουμε μια $g(x)$ ορισμένη και συνεχή σε διάστημα $[\alpha,\beta]$, τέτοια, ώστε $g(\alpha) = -1$ και $g(\beta) = 1$. Η $g(x) = x^2$ ΔΕΝ ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις.

  Αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη επιλογή είναι ακατάλληλη.
  Πρέπει να διευκρινιστεί εδώ ότι το ολοκλήρωμα $\int\limits_{-\rho}^{\rho} \sqrt{1-x^2}dx$ είναι εκτός ύλης, αλλά κρίθηκε γόνιμη επιλογή αφενός προκειμένου να αναδειχτεί η προβληματική αυτή κατάσταση, αφετέρου επειδή η λύση του σχολικού βιβλίου είναι ενδεικτική και αξίζει συζήτηση. Η εφαρμογή που το παρουσιάζει είναι εκτός ύλης, δεν ισχύει όμως το ίδιο και για ασκήσεις όπου στο βιβλίο λύσεων ακολουθείται η ίδια τακτική.

Παραδειγμα 6. Αν ακολουθήσουμε την οπτική του σχολικού βιβλίου για το

$$K = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Θα πούμε (οι διατυπώσεις ακολουθούνται κατά γράμμα):
Εφόσον $-1 \le x \le 1$, υπάρχει $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε $x = \eta\mu\theta$.
Επιπλέον θα είναι για $x = -1$, το $\theta = -\frac{\pi}{2}$, ενώ για $x = 1$, θα είναι $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Επομένως:

$$\mathrm{K} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\eta\mu^2\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta d\theta \overset{\sigma\upsilon\nu\theta \ge 0}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\eta\mu 2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ποιο είναι το πρόβλημα;

A. Γίνεται χρήση του θεωρήματος από δεξιά προς τα αριστερά. Δεν αναφέρεται, δεν ανοίγει συζήτηση επ' αυτού. Μένει στο σκοτάδι.

B. Επιλέγεται η $g(x) = \eta\mu x$ (ή.. $g(\theta) = \eta\mu\theta$ αν προτιμάτε) χωρίς καμία εξήγηση. Σαν «από μηχανής θεός» (για να θυμηθούμε τα λόγια του George Polya).

Γ. Παρουσιάζεται το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως μονόδρομος. Δεν αναφέρεται ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιοδήποτε άλλο διάστημα.

Δ. Λόγω του Γ αφήνεται μετέωρη η σύγχυση σε σχέση με το 1-1.

E. Στην εύρεση των νέων ορίων δε λύνεται η τριγωνομετρική εξίσωση, αλλά επιλέγεται χωρίς εξηγήσεις μία από τις άπειρες ρίζες για κάθε εξίσωση.

Τι συμβαίνει εδώ;
Ουσιαστικά για το

$$K = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx,$$

ως 2ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος, δεχόμαστε ότι έχουμε $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού $[-1,1]$ και θέλουμε μια g συνεχή συνάρτηση, με συνεχή παράγωγο σε διάστημα $\Delta = [\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε $g(\alpha) = -1$ και $g(\beta) = 1$, ενώ η f να είναι συνεχής στο $g(\Delta)$.
Έχουμε κατά νου ότι πρέπει το ολοκλήρωμα να απλοποιηθεί, ενώ η επιλογή της $g(x) = \sqrt{x}$ έχει ήδη απορριφθεί. Η διαφορά $1-x^2$ θυμίζει τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα. Οπότε σε συνδυασμό με τα $g(\alpha) = -1$ και $g(\beta) = 1$, άρα και g$(\Delta) = [-1,1]$, μας οδηγούν προς τα $\eta\mu$x και $\sigma\upsilon\nu$x ως πιθανές επιλογές.

1η επιλογή: Επιλέγουμε τη $g(x) = \eta\mu x$, με $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ και $g\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Σημειώνουμε ότι επίτηδες θα κάνουμε μια αντισυμβατική και φαινομενικά παράδοξη επιλογή. Θα πάρουμε:

- θετική τιμή του x για το -1 και αρνητική τιμή του x για το -1
- διάστημα στο οποίο η g ΔΕΝ είναι 1-1

Τότε $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ συνεχής στο $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ενώ $g(\Delta) = [-1,1]$, στο οποίο η f είναι συνεχής. Επομένως:

$$K = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1-\eta\mu^2 x} \cdot (\eta\mu x)'\, dx =$$

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} |\sigma\upsilon\nu x| \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = -\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sigma\upsilon\nu x| \cdot \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$-\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (-\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} (-\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^2 x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^2 x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^2 x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[x + \frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[x + \frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[x + \frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{3\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2η επιλογή: Επιλέγουμε τη $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, με $g(-\pi) = -1$ και $g(0) = 1$. Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[-\pi, 0]$, με συνεχή παράγωγο $g'(x) = -\eta\mu x$. Επίσης η f συνεχής στο $g(\Delta) = [-1, 1]$. Οπότε έχουμε:

$$K = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'\, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{0} |\eta\mu x| \cdot (-\eta\mu x)dx \overset{\eta\mu x \leq 0}{=} \int_{-\pi}^{0} (\eta\mu^2 x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[x - \frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2}(0 + \pi - 0) = \frac{\pi}{2}$$

4 Μια πρόταση για τη διδασκαλία του 1ου θεωρήματος.

Κατά τη διδασκαλία, προκειμένου να γίνει σαφέστερη η δυνατότητα χρήσης του 1ου θεωρήματος και με τους δύο τρόπους, μετά την παρουσίαση του θεωρήματος και την παράθεση της ισότητας

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du,$$

θα μπορούσαμε να σχολιάσουμε ότι αυτή μπορεί να γραφτεί και να χρησιμοποιηθεί αντίστροφα, δηλαδή ως εξής:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx,$$

ή ακόμα και σε αυτή τη μορφή:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(u)) \cdot g'(u)du.$$

Ακόμα και ένα βοηθητικό μέσο, όπως η.. «οπτική αναμόρφωση» μιας σχέσης μπορεί να παίξει ρόλο στην κατανόηση.

5 Το 2ο Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής.

Θεωρημα 2. [1] Έστω συνάρτηση g ορισμένη σε διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, συνεχώς παραγωγίσιμη, με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και f συνεχής συνάρτηση στο $g([\alpha, \beta])$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) \cdot \left(g^{-1}\right)'(x)dx$$

Αποδειξη

Θα αποδείξουμε πρώτα ένα απαραίτητο λήμμα.
Λημμα (Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης για παραγωγίσιμες συναρτήσεις)

Έστω μια 1-1, συνεχής στο (α, β) και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$συνάρτηση , και $y_0 = g(x_0)$. Τότε:

1. Αν $g'(x_0) \neq 0$, τότε η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 και ισχύει: $g^{-1}(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}$ και
2. Αν $g'(x_0) = 0$, τότε η g^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο y_0.

Αποδειξη Λημματος Η g είναι συνεχής στο (α, β), οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η εικόνα της, το $g((\alpha, \beta))$ θα είναι, επίσης, διάστημα. Εφόσον η g είναι συνεχής και 1-1, θα είναι γνησίως μονότονη. Οπότε η εικόνα $g((\alpha, \beta))$ θα είναι το ανοικτό διάστημα: $g((\alpha, \beta)) = (\gamma, \delta)$

1. Έστω $g'(x_0) \neq 0$. Θα υπολογίσω το όριο

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{g^{-1}(y_0 + h) - g^{-1}(y_0)}{h}.$$

Θα είναι, όμως: $\gamma < y_0 + h < \delta$, κι αφού η g είναι 1-1, για κάθε $h \neq 0$ θα υπάρχει μοναδικό $x_h \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_h) = y_0 + h \;\; (1).$$

Επίσης θα είναι $x_h \neq x_0$, αφού

$$x_h = x_0 \Leftrightarrow g(x_h) = g(x_0) \Leftrightarrow y_0 + h = y_0 \Leftrightarrow h = 0,$$

άτοπο. Άρα

$$g(x_h) = y_0 + h \Leftrightarrow x_h = g^{-1}(y_0 + h) \;\; (2).$$

και

$$y_0 = g(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g^{-1}(y_0) \;\; (3).$$

Επίσης από την (1) έχουμε:

$$g(x_h) = y_0 + h \Leftrightarrow h = g(x_h) - y_0 \Leftrightarrow h = g(x_h) - g(x_0) \;\; (4).$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{g^{-1}(y_0 + h) - g^{-1}(y_0)}{h} \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}}$$

[1] Εκτός σχολικής ύλης.

$$\frac{x_h - x_0}{h} \overset{(4)}{=} \frac{x_h - x_0}{g(x_h) - g(x_0)} =$$

$$\frac{1}{\frac{g(x_h)-g(x_0)}{x_h - x_0}}.$$

Οπότε για το όριο έχουμε:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{g(x_h)-g(x_0)}{x_h-x_0}} = \frac{1}{g'(x_0)},$$

επειδή:

- Εφόσον η g είναι 1-1 και συνεχής σε διάστημα συνάρτηση, θα είναι και η g^{-1} συνεχής, επομένως θα έχουμε: $\lim\limits_{h\to 0} x_h = \lim\limits_{h\to 0} g^{-1}(y_o + h) = g^{-1}(y_0) = x_0$, και
- $\lim\limits_{h\to 0} g(x_h) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{h\to 0} (g(x_0) + h) = g(x_0)$.

Άρα η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 και ισχύει: $g^{-1}(y_o) = \frac{1}{g'(x_o)}$.

2. Αν είναι $g'(x_o) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g^{-1}είναι παραγωγίσιμη στο $y_o = g(x_o)$. Τότε έχουμε: $\left(g^{-1}\circ g\right)'(x_o) = \left(g^{-1}\right)'(g(x_o))\cdot g'(x_o) = 0$, άτοπο, αφού $\left(g^{-1}\circ g\right)'(x_o) = 1$για κάθε $x_o \in (\alpha,\beta)$

Αποδειξη 2ου Θεωρηματος Αλλαγης Μεταβλητης

Η g είναι συνεχής στο $\Delta = [\alpha,\beta]$, οπότε το $g([\alpha,\beta]) = \mathrm{I}$, θα είναι διάστημα, ως συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Επίσης η g' είναι συνεχής και ισχύει ότι $g'(x) \neq 0$, άρα η g' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, επομένως η g είναι γνησίως μονότονη, άρα θα είναι και $1-1$, οπότε θα ορίζεται η αντίστροφή της, $g^{-1} : I \to [\alpha,\beta]$.
Από το Λημμα, επειδή $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, η συνάρτηση g^{-1} θα είναι παραγωγίσιμη στο I.
Τώρα αν στο 1ο Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής θεωρήσω στο 2ο μέλος της ισότητας αντί για f την $h(x) = f\cdot\left(g^{-1}\right)'(x)$, τότε θα έχουμε:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} h(x)dx = \int_\alpha^\beta h\circ g(x)\cdot g'(x)dx =$$

$$\int_\alpha^\beta \left(f\cdot (g^{-1})'\right)\circ g(x)\cdot g'(x)dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta (f\circ g)(x)\cdot\left((g^{-1})'\circ g\right)(x)\cdot g'(x)dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta (f\circ g)(x)\cdot\left(g^{-1}\circ g\right)'(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ g)(x)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (f\circ g)(t)dt.$$

Παρατηρηση 5. **Α** Στην απόδειξη του Λήμματος χάριν οικονομίας χώρου θεωρήσαμε γνωστό το θεώρημα[2]:

Θεωρημα. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και $1-1$ στο διάστημα I τότε:

1. Η g είναι γνησίως μονότονη και
2. η g^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

Β. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι στην απόδειξη βρίσκεται η εξήγηση για την ύπαρξη της συνθήκης:

«$g'(x) \neq 0$»

αντί της

«g: γνησίως μονότονη»

(το οποίο είναι άμεσο συμπέρασμα). Η συγκεκριμένη συνθήκη είναι κλειδί για την ύπαρξη της $\left(g^{-1}\right)'$.

Γ. Δεν μπορούμε παρά να παρατηρήσουμε ότι :

- η απόδειξη του 2ου Θεωρήματος είναι πολύ πιο δύσκολη.
- οι υποθέσεις που απαιτούνται για να εφαρμοστεί είναι αισθητά περισσότερες.
- για την απόδειξή του χρησιμοποιήσαμε το 1ο Θεώρημα.

Παραδειγμα 7. Θα επιστρέψουμε στο $J = \int_1^{e^2} \ln\sqrt{x}dx$. Τώρα όμως θα το υπολογίσουμε με χρήση του θεωρήματος 2. Είναι της μορφής $\int_\alpha^\beta f(g(t))dt$, όπου:

- $\alpha = 1$, $\beta = e^2$,
- $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1,e^2]$, παραγωγίσιμη στο $[1,e^2]$, με $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ στο $[1,e^2]$, άρα $g\prime(x) \neq 0$ και $g\left([1,\mathrm{e}^2]\right) \overset{\nearrow}{=} [1,e]$.
- $f(x) = lnx$, συνεχής στο $[1,e]$. Επίσης λύνω την εξίσωση $y = g(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} x = y^2$, άρα $g^{-1}(x) = x^2$,$x\in[1,e^2]$, με $g'(x) = 2x$,$x\in[1,e^2]$ Έτσι, από το θεώρημα, έχουμε: $J = \int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}dx = \int_1^e \ln x\cdot 2xdx = \ldots = \frac{e^2+1}{2}$

Παρατηρηση 6. **Α.** Μετά την αντικατάσταση προκύπτει ακριβώς το ίδιο ολοκλήρωμα που προέκυψε με τη χρήση του 1ου θεωρήματος, όμως από διαφορετικό δρόμο, με διαφορετικές συνθήκες. Πιθανά το σωστό αποτέλεσμα, ή ακόμα και το ίδιο ολοκλήρωμα, να προέκυπτε και με κάποια «μηχανική αντικατάσταση», είδαμε όμως ότι αυτό δεν θα σήμαινε απαραίτητα ότι θα είχε γίνει σωστά η εφαρμογή των θεωρημάτων.

[2]Για την απόδειξή του ενδεικτικά βλ. Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός* εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999, θεώρ. 10.14, σελ 178-179

Β. Μήπως θα μπορούσε το $K = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$, του Παραδείγματος 5, να υπολογιστεί με το 2ο θεώρημα, και τη $g(x) = x^2$; Η $g(x)$ έχει παράγωγο $g'(x) = 2x$, η οποία όμως μηδενίζει για $x = 0$, άρα δεν θα ήταν κατάλληλη μια τέτοια επιλογή.

Τέλος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το 2ο θεώρημα είναι μάλλον λιγότερο εύχρηστο από το 1ο. Απαιτεί περισσότερες προϋποθέσεις και η εφαρμογή του απαιτεί περισσότερες ενέργειες (εύρεση αντιστρόφου για τη g , αλλά και την παράγωγο της g^{-1}).

6 Η «ασυναίσθητη» σύγχυση των θεωρημάτων. Μια προσπάθεια ερμηνείας.

Πέραν όσων έχουν ήδη αναφερθεί, κρίνουμε ότι έχει διδακτική αξία να ασχοληθούμε με το πώς κάποιες φορές συγχέονται «ασυναίσθητα» τα δύο θεωρήματα κατά τη «μηχανική» αλλαγή μεταβλητής. Ασφαλώς η βάση είναι γνωστική, μα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια ερμηνεία σε σύνδεση με τη «μηχανική» εφαρμογή, η οποία τόσο μας απασχόλησε ως εδώ. Λόγω της μορφής της ισότητας, το 2ο θεώρημα συγχέεται καμιά φορά με τη χρήση του 1ου θεωρήματος, «από δεξιά προς τα αριστερά». Στο Παράδειγμα 3 και την αντίστοιχη παρατήρηση Γ, είδαμε πώς υπολογίζουμε το $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$ με χρήση του 1ου θεωρήματος «από δεξιά προς τα αριστερά». «Μηχανικά» κάποιος θα έγραφε:

> Θέτουμε: $\sqrt{x} = u \Leftrightarrow x = u^2$ (1) , με $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ οπότε για $x = 0$ είναι $u = 0$, ενώ για $x = \frac{\pi^2}{4}$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$.

Ακριβώς σε αυτή τη.. μη-σκέψη «κρύβεται» το 2ο θεώρημα.

Στο I_1 ο συγκεκριμένος λύτης «βλέπει» τη μορφή $\int_\alpha^\beta f(g(t))dt$ (2ο θεώρημα) και όχι την $\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$ (1ο θεώρημα). Χρησιμοποιώντας το 1ο θεώρημα η $g(x)$ θα οριστεί στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (ή άλλο κατάλληλο διάστημα), εδώ η $g(x) = \sqrt{x}$ ορίζεται για $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, επομένως εφαρμόζεται το 2ο θεώρημα. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται «ασυναίσθητα» το 1-1 κατά την επίλυση της (1), ενώ φυσικά δεν απαιτείται από το 1ο θεώρημα, αλλά από το 2ο. Για να καταλήξουμε στο $x = u^2$, που επί της ουσίας είναι το $g^{-1}(u) = u^2$ (2). Και στην αλλαγή των ορίων, παίρνουμε τα $g(\alpha)$ και $g(\beta)$ επίσης, με χρήση του 2ου θεωρήματος. Τέλος, στα διαφορικά, από την (2) παίρνουμε ουσιαστικά $\left(g^{-1}\right)'(u) = 2u$. Έτσι καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα: $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\cdot\left(g^{-1}\right)'(u)du =$..... Για το οποίο όμως απαιτείται $g'(x) \neq 0$ στο $\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, το οποίο ΔΕΝ ισχύει.

7 Οι ασκήσεις με αλλαγή μεταβλητής του σχολικού βιβλίου.

Στο σχολικό βιβλίο όλες οι μετατροπές γίνονται με το μοτίβο που ήδη περιγράφτηκε. Μάλιστα στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι μετατροπές γίνονται θεωρώντας το ζητούμενο ολοκλήρωμα ως το 1ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος (αν και αυτό δεν δηλώνεται πουθενά). Δεν θα παραθέσουμε άλλο παράδειγμα από την πλειοψηφία, λοιπόν, ώστε να αποφύγουμε την επανάληψη. Θα σταθούμε σε μια άσκηση που αποτελεί την (μάλλον μοναδική) εξαίρεση, στην οποία εφαρμόζεται το θεώρημα «από δεξιά προς τα αριστερά».

Παραδειγμα 8. (Άσκηση 4, Β' Ομάδας, παρ. 3.7)
Κατά τον υπολογισμό του εμβαδού χρειάζεται να υπολογίσουμε το $\mathrm{I} = \int_2^5 \sqrt{x-1}dx$. Στις λύσεις του σχολικού επιλέγεται η μέθοδος της αντικατάστασης.
Γράφει: Θέτουμε $u = \sqrt{x-1}$, οπότε $du = dx$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ και έτσι έχουμε:

$$E = \int\limits_1^4 u^{\frac{1}{2}}du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \ldots$$

Τι συμβαίνει εδώ;
Το I θεωρείται ως το δεύτερο μέλος της ισότητας του θεωρήματος, $\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$, με:

- $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [2, 5]$.
- $g(x) = x + 1$, $x \in [1, 4]$, με συνεχή παράγωγο $g'(x) = 1$ και $g([1, 4]) = [2, 5]$, όπου η f είναι συνεχής.

Οπότε το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με τη μορφή: $\int\limits_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx$, άρα: $\mathrm{I} = \int_1^4 \sqrt{x}dx =$ .... Όμως το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με την παράγουσα, ως:

$$\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 = \ldots = \frac{14}{3}$$

. Επομένως ένας μαθητής δεν θα μπορούσε να πειστεί εύκολα για την αξία χρήσης «από τα δεξιά προς τα αριστερά». Φαίνεται (και είναι- για το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα) κάπως άστοχη.

Παρεμπιπτόντως, εδώ εφαρμόζεται και το 2ο θεώρημα αντικατάστασης, αλλά εφόσον μπορούμε εύκολα να βρούμε παράγουσα, δεν προτείνεται, όπως δεν προτείνεται και το 1ο θεώρημα εξάλλου.

Ενα γενικοτερο συμπερασμα

Ο τρόπος που χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο το θεώρημα γίνεται σχεδόν αποκλειστικά «από αριστερά προς τα δεξιά». Είναι άρα σχεδόν σίγουρο ότι διδακτικά θα εστιάσουμε σε αυτή τη χρήση. Πιστεύουμε όμως ότι χρειάζεται ακόμα και σε αυτό το πλαίσιο, να επισημαίνεται η δυνατότητα και των δύο χρήσεων και η αξία των περιορισμών, με χρήση των κατάλληλων παραδειγμάτων, καθώς είναι σημαντικό να βοηθάμε τους μαθητές να απαλλάσσονται από τις «μηχανικές» ενέργειες και να εμβαθύνουν στις έννοιες. Εντούτοις, έχει μια διδακτική αξία η συντόμευση της διαδικασίας εφαρμογής, όπου αυτό είναι δυνατόν.

Προτείνουμε το εξής πλαίσιο:

Για να πάμε από το αριστερό στο δεξί μέλος:

Α. Αν έχουμε το ολοκλήρωμα στη μορφή: $\int_\alpha^\beta f(g(x))\ \ g'(x)dx$ έχουμε όλες τις προϋποθέσεις που χρειαζόμαστε, με δεδομένο ότι το ολοκλήρωμα ορίζεται.

Β. Αν χρειάζεται εμείς να «εμφανίσουμε» τη g' , προσέχουμε να εξασφαλίσουμε ότι είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ενώ η f που σχηματίζεται τότε, να είναι συνεχής στο $g(\Delta)$.

Γ. Αντικαθιστούμε:

- με $\left\{\begin{array}{c} u \text{ το } g(x) \\ du \text{ το } g'(x)dx \end{array}\right.$
- και με $\left\{\begin{array}{l} g(\alpha) \text{ το } \alpha \\ g(\beta) \text{ το } \beta \end{array}\right.$

κι έτσι παίρνουμε: $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du.$

Τελευταίο παράδειγμα:

Παραδειγμα 9. *Ενα ολοκλήρωμα, τρει τρόποι λύσης.*

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\sqrt{2}}^{2} x\cdot\sqrt{x^2-1}dx$ με τρεις τρόπους, ώστε να φανούν συγκεντρωτικά οι διαφορετικοί τρόποι λύσης.

Α′ τρόπος : Με το 1ο θεώρημα, από αριστερά προς τα δεξιά.

Θεωρούμε το I ως το 1ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος, δηλαδή το $\int_\alpha^\beta f(g(x))\ \ g'(x)dx$. Έστω:

- $g(x)=\sqrt{x^2-1}$, με $x\in[\sqrt{2},2]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, με
- $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, η οποία είναι συνεχής στο $\Delta=[\sqrt{2},2]$ και αφού $g'(x)>0$, θα είναι g γνησίως αύξουσα, άρα $g(\Delta)=[1,\sqrt{3}]$ και
- $f(x)=x^2$ συνεχής στο $g(\Delta)$.

Επίσης το I γίνεται: $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-1)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$ Άρα έχουμε: $I=\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{3}} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{1}{3}.$

Β′ τρόπος : Με το 1ο θεώρημα, από δεξιά προς τα αριστερά.

Θεωρούμε το I ως το 2ο μέλος της ισότητας του θεωρήματος. Δηλαδή ως $I=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$

1. Έστω συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x}$ με $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, συνεχείς στο $\Delta=[2,4]$, $g'(x)>0$ στο Δ , άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Επίσης:
2. $g(2)=\sqrt{2}$ και $g(4)=2$, άρα $g(\Delta)=[\sqrt{2},2]$ και
3. $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2-1}$ συνεχής στο $g(\Delta)$. Οπότε θα είναι : $I=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=$ $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_2^4\sqrt{x}\sqrt{x-1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$ $\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{x-1}dx=\frac{1}{3}\left[(x-1)^{3/2}\right]_2^4=\sqrt{3}-\frac{1}{3}$

Γ′ τρόπος Με το 2ο θεώρημα.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα ως: $I=\int_\alpha^\beta f(g(t))dt$, με $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=2$ και $f(g(t)=t\cdot\sqrt{t^2-1}$. Έστω, επίσης: $g(x)=x^2-1$, με $g'(x)=2x>0$ (άρα και $\neq 0$) στο $\Delta=[a,\beta]=[\sqrt{2},2]$, οπότε g : γνησίως αύξουσα στο Δ , με $g(\Delta)=[1,3]$. Άρα η g είναι και αντιστρέψιμη, με: $g^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$, παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, με $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Τέλος, η $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $g(\Delta)$. Τότε:

$$I=\int_\alpha^\beta f(g(t))dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\cdot\left(g^{-1}\right)'(x)dx=$$

$$\int_1^3\sqrt{x+1}\ \ \sqrt{x}\ \ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx=\frac{1}{3}\int_1^3\sqrt{x}dx=$$

$$\frac{1}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\sqrt{3}-\frac{1}{3}$$

8 Επίλογος.

Θα αναρωτιόταν κανείς αν τα παραπάνω είναι «ψιλά γράμματα». Ίσως κάποιος άλλος να θεωρεί πως αφού έτσι είναι τώρα τα πράγματα, «τι τα θες, τι τα γυρεύεις;». Ή κάποιος τρίτος να προβληματίζεται για το πότε και με ποιους να συζητηθούν τέτοια θέματα στην τάξη.
Θεωρούμε ότι οι παραπάνω οπτικές οφείλουν να εξαντληθούν. Τα στατιστικά των τελευταίων ετών στις πανελλαδικές εξετάσεις είναι ενδεικτικά. Ίσως ήρθε η ώρα να μπει ένα τέρμα στα.. «κουτάκια», στις στείρες «μεθοδολογίες», στην παπαγαλία και τις «μηχανικές» λύσεις, αλλά και τις «μηχανικές» διδασκαλίες.
Ίσως, επίσης, ήρθε η ώρα να σκεφτούμε πολύ σοβαρά το θέμα της αναβάθμισης και εμπλουτισμού του σχολικού βιβλίου ως προς τη δομή, το ύφος, τις ασκήσεις, την ύλη. Αυτά, σε συνδυασμό με γενικότερα ερωτήματα, όπως «τι απόφοιτους θέλουμε, τι Παιδεία θέλουμε».
Στο κείμενο κάναμε προσπάθεια να φωτιστεί ενδεικτικά ένα σημείο της ύλης από ένα κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου, το οποίο εξάλλου έχει πολλά άλλα, μεγαλύτερα προβλήματα. Αντικειμενικά ανακύπτει το ερώτημα:

Πρέπει να «στρογγυλεύουμε» τη μαθηματική αλήθεια στο βωμό της ύλης και των εξετάσεων ή/ και των δυσκολιών·». Η πραγματικότητα επιβάλλει να δεχτούμε ότι δεν είναι άσπρη ή μαύρη κάθε εικόνα. Ασφαλώς δεν είναι όλες οι τάξεις ίδιες, είναι σίγουρο ότι δεν υπάρχει παντού το ίδιο ενδιαφέρον, αλλά είναι σημαντικό να υπάρχει ενδιαφέρον από τη δική μας πλευρά και οπωσδήποτε αυτό θα διαχυθεί και στους μαθητές μας. Οφείλουμε -εμείς πρώτα- να κατανοούμε σε βάθος τις έννοιες που διδάσκουμε και στη συνέχεια να επιμένουμε με τους μαθητές μας. Οι τεράστιες παρανοήσεις που κουβαλάνε οι μαθητές οπωσδήποτε έχουν βαθιές ρίζες σε σημαντικότερες αιτίες. Από τη δική μας πλευρά οφείλουμε να φροντίζουμε ώστε οι αιτίες αυτές να αναδεικνύονται και να αντιπαλεύονται, ενώ ταυτόχρονα με αποφασιστικότητα να αναμετρούμαστε καθημερινά με τις δυσκολίες, αφιερώνοντας ψυχή στη διδασκαλία των μαθηματικών.

9 Βιβλιογραφία.

1. Σ.Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μελέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος , *Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής* , Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

2. Π.Μ. Βλάμος, *Ανάλυση. Ολοκλήρωμα Συνάρτησης* (τόμος 3) , Εκδόσεις «V», Αθήνα 1999

3. Θ.Ν. Καζαντζής , *Ολοκληρώματα* , Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη 1994

4. Αντώνης Κυριακόπουλος, Γιώργος Τασσόπουλος, *Το θεώρημα αντικατάστασης στα ορισμένα ολοκληρώματα και μια αναφορά στις συναρτήσεις της μορφής* $g(x) = \int_\alpha^\beta f(x,t)dt$ (εργασία) https://goo.gl/ipEzmZ

5. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός* (τόμος Ι), Συμμετρία, Αθήνα 1999

6. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός* (τόμος ΙΙα), Αίθρα, Αθήνα 1995

7. Μ. Τουμάσης, *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα 2002

8. Richard Courant , Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis* I , Springer 1965

9. George Polya , *Mathematical Discovery. On Understanding, Learning And Teaching Problem Solving*, Vol.I, ISHI Press, 2009

10. G.E. Shilov , *Elementary Real and Complex Analysis* , Dover Publications, Inc. New York 1973

11. Michael Spivak , *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός* , ΠΕΚ 2013

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τους αγαπητούς φίλους και συναδέλφους: Χρήστο Κυριαζή, Μπάμπη Στεργίου, Γιώργο Πρέσβη, Γιάννη Καρεκλά για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τη βοήθεια.