

ΟΙ ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΩΣ ΤΟΜΕΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σπύρος Παναγιωτόπουλος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με προβλήματα του Απολλώνιου. Χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο γίνεται μια απλή προσέγγιση της εξίσωσης του Απολλώνιου σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Στο δεύτερο γίνεται η κατασκευή των οχτώ κατ' εξοχήν προβλημάτων του Απολλώνιου με όχι Ευκλείδειο τρόπο ,αλλά με τομές κωνικών ,χρησιμοποιώντας πρόγραμμα δυναμικής Γεωμετρίας. Επιδιώκεται η προσέγγιση του άγνωστου τρόπου κατασκευής του Απολλώνιου στο έργο του Επαφές .Σχετικές προσπάθειες έχουν γίνει στο παρελθόν από πολλούς μαθηματικούς με πρώτο τον Αντριαν φον Ρόομεν ον 16^ο αιώνα. Στο τρίτο μέρος γίνεται μια επέκταση των Απολλώνιων κατασκευών στην περίπτωση των τεσσάρων κύκλων , ενός από τα οχτώ προβλήματα διατυπώνοντας μια σχετική ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του ζητουμένου κύκλου.

ABSTRACT

The present work deals with the Apollonian problems. Includes three parts. The first part presents a simple approach of the Apollonian equation in a rectangular system of axes. The second part presents the creation of the eight main Apollonian problems based not on the Euclidian way but on the conic sections ,according to the dynamic geometry program. It intends to approximate the unknown mode of construction the Apollonian problem , something which has happened again in the past by many mathematicians such as Andrew fin Roomen in the 16th century .The third part presents the creation of the Apollonian problem in the case of the four circles in one of eight problems, stating a relevant rule for the circle in question

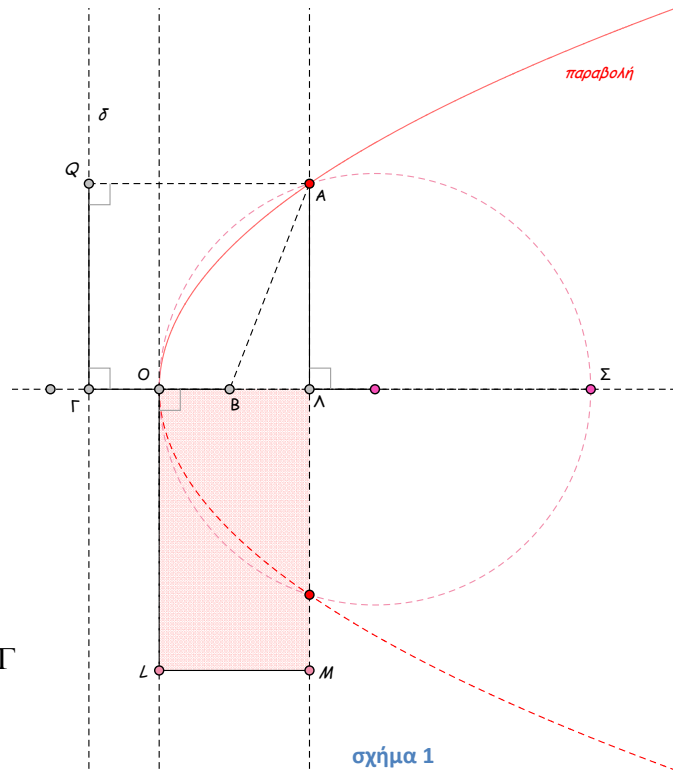
ΜΕΡΟΣ Α΄

$$\text{Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ} : \psi^2 = 2\rho\chi + q\chi^2$$

Για την λύση της παραπάνω εξίσωσης στο πνεύμα των έργων του Απολλώνιου [4] διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Α) αν $\rho=0$ τότε $\psi^2=q\chi^2$, q είναι ο λόγος των προβολών των καθέτων πλευρών χ,ψ ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ στην υποτείνουσα

B) αν $\rho > 0$ και $q = 0$ τότε $\psi^2 = 2\rho\chi$,
 $OL = \chi$, $OL = \Lambda\Sigma = 2\rho$ (σχήμα 1) το
 A γράφει παραβολή
 μεταβαλλόμενου του Λ . Το B
 απέχει από το O , $\frac{\rho}{2}$ και το Γ
 απέχει από το O , $\frac{\rho}{2}$. Το εμβαδόν
 του $OLML$ χαρακτηρίζεται ως
 «παραβάλλεται» [4] και το
 $\Lambda\Lambda^2 = OL \cdot OL$ ως σύμπτωμα [2].



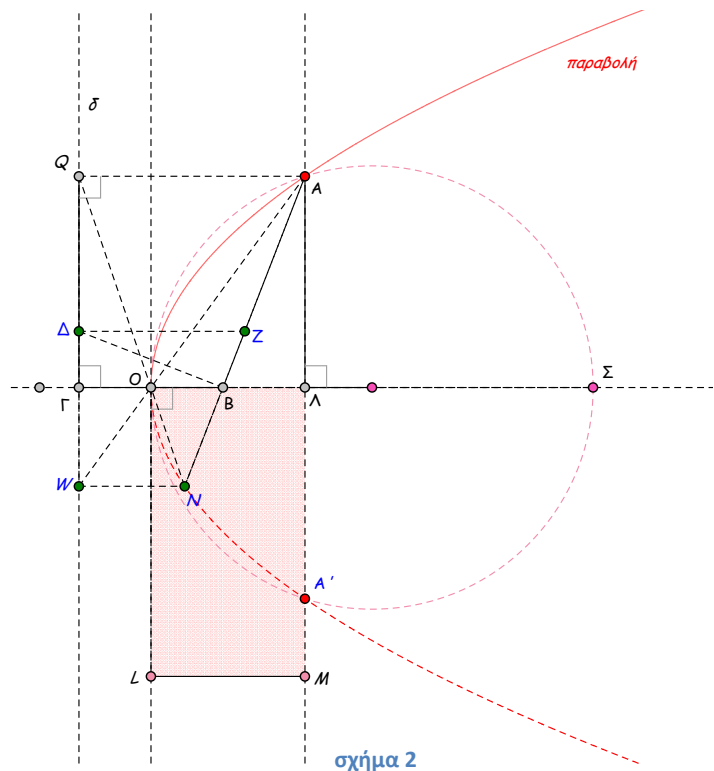
Τότε

$$AB = \sqrt{\psi^2 + \left(\chi - \frac{\rho}{2}\right)^2} = \chi + \frac{\rho}{2} = \Lambda\Gamma$$

άρα η κάθετη στο Γ στην $\Gamma\Lambda$
 είναι η διευθετούσα και το B η
 εστία της παραβολής [1].

Μια ιδιότητα

Αν AN είναι εστιακή χορδή
 τότε $AN = AQ + WN$, στο
 δισορθογώνιο τραπέζιο
 $ANWQ$ (σχήμα 2) οι
 διχοτόμοι των γωνιών A και N
 τέμνονται στο Δ , το μέσο του
 QW και ΔB κάθετη AN . Αν Z
 το μέσο του AN τότε οι
 διαγώνιοι του τραπέζιου QN ,
 WA τέμνονται στο O , όπου
 ΓB είναι ο αρμονικός μέσος
 των AB, BN και ίσος με το
 μισό του $OL = \rho$, ΔB ο
 γεωμετρικός και ΔZ ο
 αριθμητικός μέσος τους. Έτσι
 είναι $\Gamma B \leq \Delta B \leq \Delta Z$ από τα
 σχηματιζόμενα ορθογώνια
 τρίγωνα γνωρίζοντας ακόμα
 ότι ΔN κάθετη με την ΔA [3].



Γ) αν $\rho > 0$ και $0 < |q| < 1$ η εξίσωση διαμορφώνεται $\psi^2 = 2\rho\chi - q\chi^2$, θέλοντας να αφαιρέσουμε εμβαδόν από το προηγούμενο ορθογώνιο ΟΓΜΑ (σχήμα 3). Αν $ΟΓ = \chi$, $ΖΑ = q\chi$, $ΓΣ = ΟΖ$, καθώς το Γ κινείται από το Ο προς τα δεξιά το Β γράφει έλλειψη. Το $ΒΓ^2 = ΟΓ \cdot ΟΖ$ είναι το σύμπτωμα

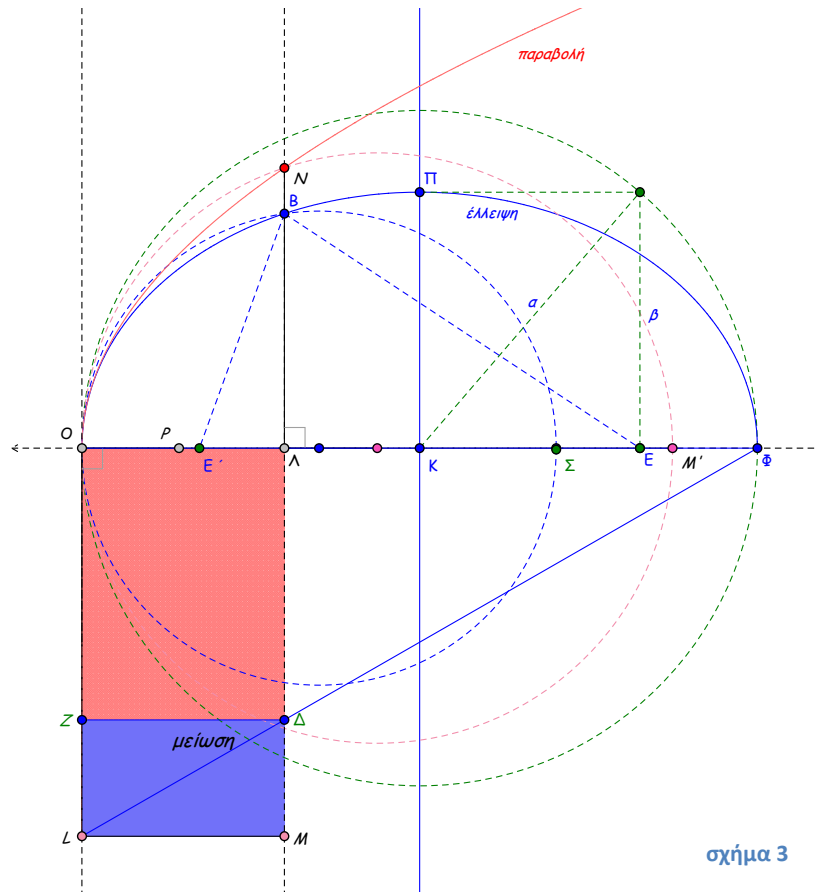
Προσδιορισμός ακροτάτων :

- το χ γίνεται μέγιστο αν το «ελλείπει» γίνει ίσο με το προηγούμενο ορθογώνιο δηλ.

$$2\rho\chi = q\chi^2, \text{ όταν } \chi = \frac{2\rho}{q} \text{ τότε } \psi = 0$$

- το ψ γίνεται μέγιστο αν το «ελλείπει» γίνει ίσο με το ήμισυ του προηγούμενου ορθογωνίου δηλ. $\frac{1}{2} 2\rho\chi = q\chi^2 \Rightarrow \chi = \frac{\rho}{q}$, $\psi^2 = \frac{\rho^2}{q} \Rightarrow \psi = \frac{\rho}{\sqrt{q}} = \beta$, τότε $ΟΚ = \frac{\rho}{q} = \alpha$ και

$$ΟΛ = \frac{2\rho}{q} = 2\alpha$$



Μια ιδιότητα :

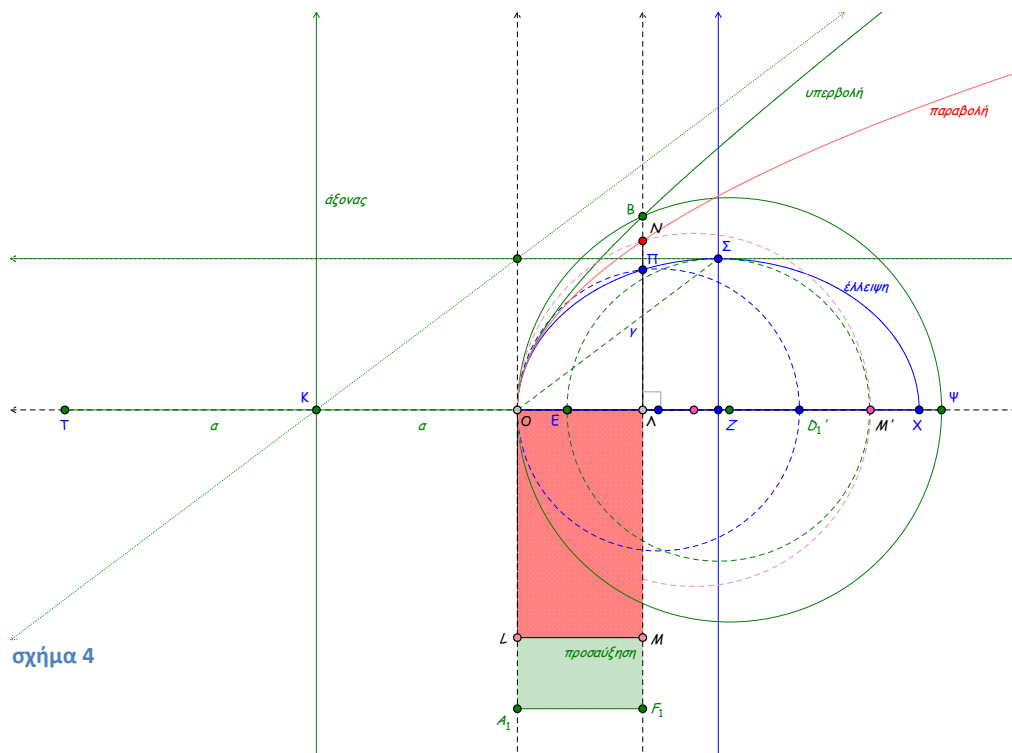
$$\frac{ΒΓ^2}{ΟΓ \cdot ΑΓ} = \frac{\psi^2}{\chi(2\alpha - \chi)} = \frac{2\rho - q\chi}{2\alpha - \chi} = \frac{2\alpha q - q\chi}{2\alpha - \chi} = \frac{q(2\alpha - \chi)}{2\alpha - \chi} = q = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{2\rho}{2\alpha} = \frac{ΟΑ}{ΟΛ} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} [4]$$

Παρατήρηση : τα σημεία A, Δ, Λ είναι συνευθειακά από $\frac{Z\Delta}{ZA} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{q}$

Η εξίσωση $\psi^2 = 2\rho\chi - q\chi^2$ μετασχηματίζεται $\frac{\left(\chi - \frac{\rho}{q}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{q}\right)^2} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{\rho}{\sqrt{q}}\right)^2} = 1, \alpha = \frac{\rho}{q}, \beta = \frac{\rho}{\sqrt{q}},$

$$\gamma = \frac{\rho}{q}\sqrt{1-q} \text{ και εκκεντρότητα } \varepsilon = \sqrt{\frac{1-\rho}{q}}$$

Δ) αν $\rho > 0$ και $q > 0$ η εξίσωση διαμορφώνεται $\psi^2 = 2\rho\chi + q\chi^2$, θέλοντας να προσθέσουμε εμβαδόν «υπερβάλλει» [4] (σχήμα 4) από το προηγούμενο ορθογώνιο $O\Lambda M L$ της παραβολής.



Αν $OL = \chi, LA_1 = q\chi, \Lambda\Psi = OA_1$, καθώς το Λ κινείται από το O προς τα δεξιά το B γράφει υπερβολή. Το $\Lambda B^2 = OL \cdot OA_1$ είναι το σύμπτωμα

Τα στοιχεία της υπερβολής προσδιορίζονται από τα στοιχεία της προηγούμενης έλλειψης ως εξής:

Το κέντρο της K είναι συμμετρικό του Z ως προς το O και η εστία E είναι η τομή του κύκλου κέντρου K και ακτίνας $OS = \gamma$ αφού $SZ = \beta$ και $OZ = \alpha$

Μια ιδιότητα :

$$\frac{BL^2}{OL \cdot TL} = \frac{\psi^2}{\chi(2\alpha + \chi)} = \frac{2\rho + q\chi}{2\alpha + \chi} = \frac{2\alpha q + q\chi}{2\alpha + \chi} = \frac{q(2\alpha + \chi)}{2\alpha + \chi} = q = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{2\rho}{2\alpha} = \frac{OL}{O\Psi} = \frac{OL}{TO} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

[4]

Η εξίσωση $\psi^2 = 2\rho\chi + q\chi^2$ μετασχηματίζεται $\frac{\left(\chi + \frac{\rho}{q}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{q}\right)^2} - \frac{\psi^2}{\left(\frac{\rho}{\sqrt{q}}\right)^2} = 1$ και $\gamma = \frac{\rho}{q}\sqrt{1+q}$ και

εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{\frac{1+\rho}{q}}$

ΜΕΡΟΣ Β'

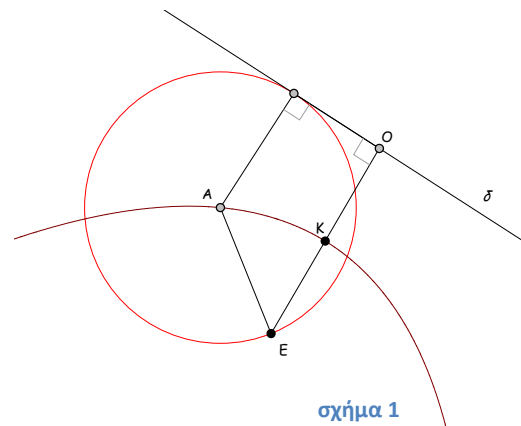
ΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ –ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

Πριν ξεκινήσουμε τις κατασκευές πρέπει να παρουσιάσουμε μερικές βοηθητικές προτάσεις που είναι γνωστές και ως περιβάλλουσες καμπύλες

Λήμμα 1

Ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο E και από σταθερή ευθεία δ είναι παραβολή με εστία το E και διευθετούσα την δ και κορυφή το μέσον K της απόστασής τους. Το ρ είναι ίσο με την απόσταση του σημείου από την ευθεία.

Ο κύκλος με κέντρο A πάνω στην παραβολή και ακτίνα ίση με την απόσταση του A από το E πληροί την ιδιότητα του γ.τ. (σχήμα 1)

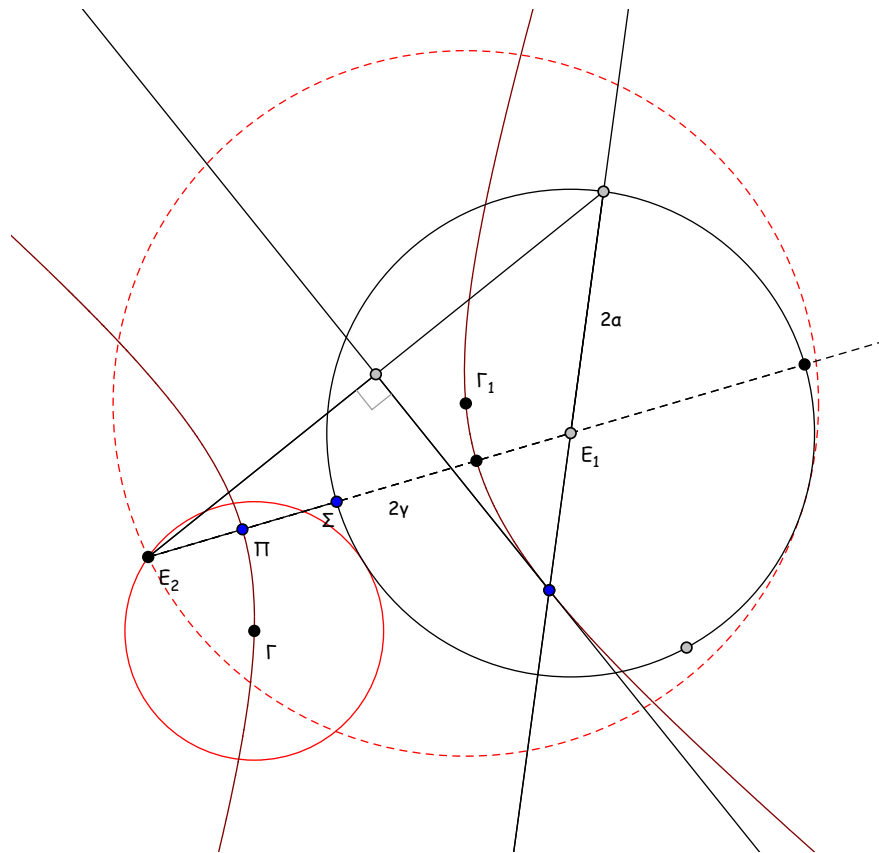


σχήμα 1

Λήμμα 2

Ο γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από σταθερό σημείο E_2 και από σταθερό κύκλο $(E_1, 2\alpha)$ είναι τα σημεία της υπερβολής με εστίες τα E_1, E_2 και $2\gamma = E_1E_2$ ή με κορυφή το μέσο της «μικρότερης απόστασης» του E_2 με τον κύκλο ή με διαφορά 2α . Κάθε κύκλος με κέντρο Γ πάνω στην υπερβολή και ακτίνα ΓE_2 έχει την προηγούμενη ιδιότητα του γ.τ. Περιπτώσεις δυο με τον κύκλο (Γ_1, Γ_1E_2) Ο πρώτος κύκλος εφάπτεται εξωτερικά και ο δεύτερος εσωτερικά με τον κύκλο $(E, 2\alpha)$ (σχήμα 2).

Επειδή $E_2E_1 > 2a$ κατασκευάζεται πάντα η υπερβολή



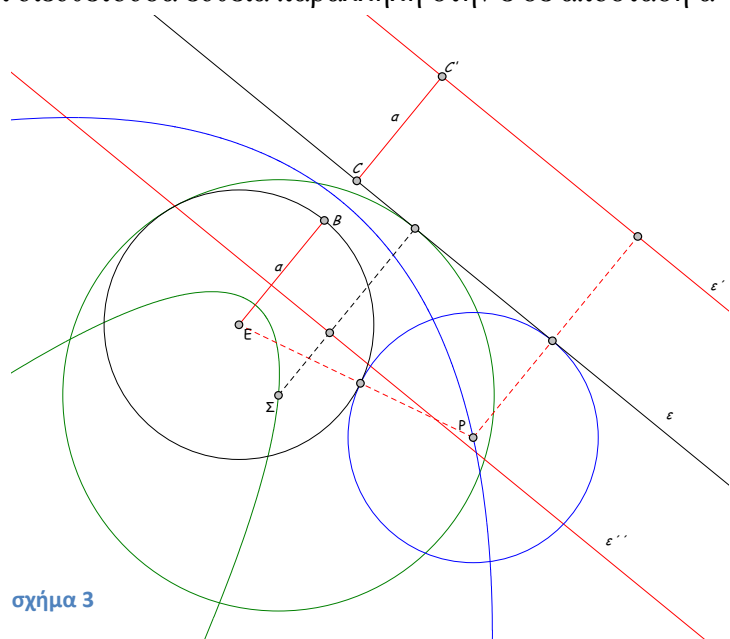
σχήμα 2

Λήμμα 3

Ο γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από σταθερό κύκλο (E, a) και από σταθερή ευθεία ε είναι παραβολή με εστία το E και διευθετούσα ευθεία παράλληλη στην ε σε απόσταση a από αυτήν, άρα δυο

περιπτώσεις. Κάθε κύκλος με κέντρο πάνω στις παραβολές P ή Σ και ακτίνα όση η απόστασή του από την αρχική ευθεία ε πληροί την ιδιότητα του γ.τ.

Το ρ είναι ίσο με την απόσταση του κέντρου από την ευθεία συν την ακτίνα ή πλην την ακτίνα αντίστοιχα με την ευθεία ε' και ε'' . Ο ένας εφάπτεται εξωτερικά και ο άλλος εσωτερικά του κύκλου (E, a) (σχήμα 3).



σχήμα 3

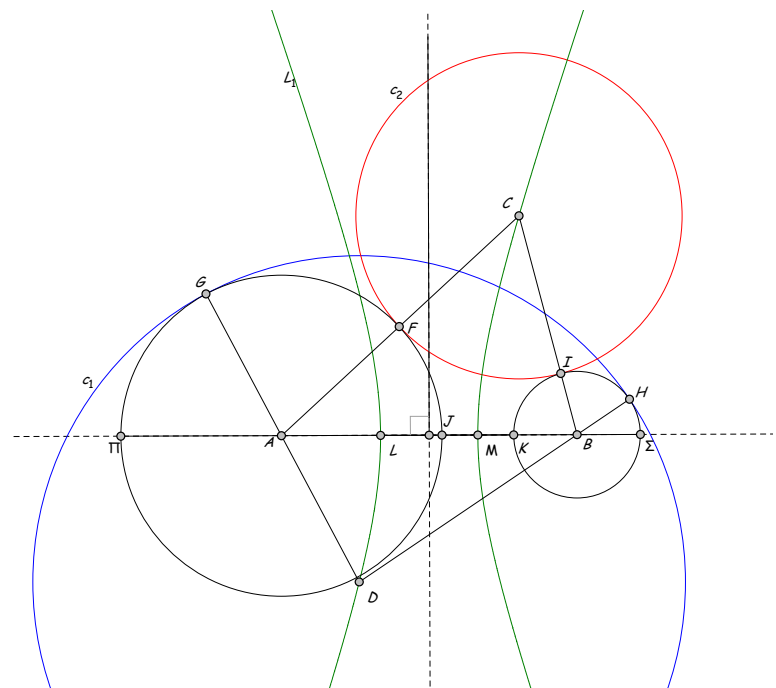
Λήμμα 4

Ο γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από δυο σταθερούς εξωτερικούς κύκλους (A, ρ_1) και (B, ρ_2) είναι υπερβολή με εστίες τα κέντρα των δυο κύκλων A και B και κορυφές τα μέσα M και L της «μικρότερης» LM και της «μεγαλύτερης» $\Pi\Sigma$ απόστασης των σημείων των κύκλων ή με διαφορά $|\rho_1 - \rho_2|$ (σχήμα 4)

Υπάρχει και δεύτερη περίπτωση με ίδιες εστίες και με κορυφές τα μέσα των δυο «μέσα έξω τμημάτων» LN, KO της διακέντρου ή με διαφορά $\rho_1 + \rho_2$ (σχήμα 5).

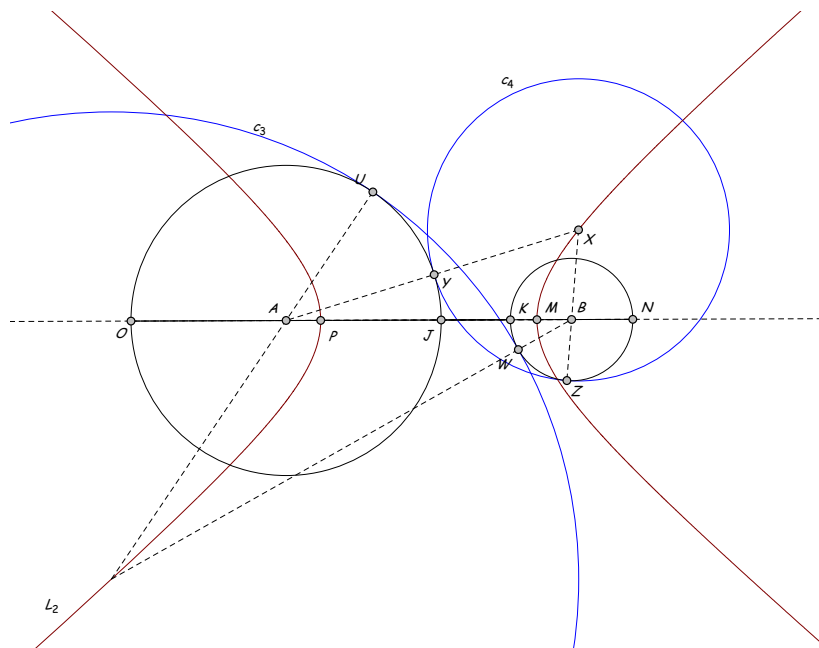
Κάθε κύκλος με το κέντρο του στους κλάδους των υπερβολών έχει την ιδιότητα του γ.τ. Σε κάθε περίπτωση προκύπτουν δυο κύκλοι με τον ένα κύκλο να εφάπτεται εξωτερικά και τον άλλο εσωτερικά των δυο αρχικών c_1, c_2 (σχήμα 4).

Στη δεύτερη περίπτωση κάθε κύκλος c_3, c_4 εφάπτεται εσωτερικά και εξωτερικά των δυο αρχικών σχήμα 5



σχήμα 4

Επειδή $d > \rho_1 + \rho_2 > |\rho_1 - \rho_2|$ οι δυο κωνικές κατασκευάζονται πάντα



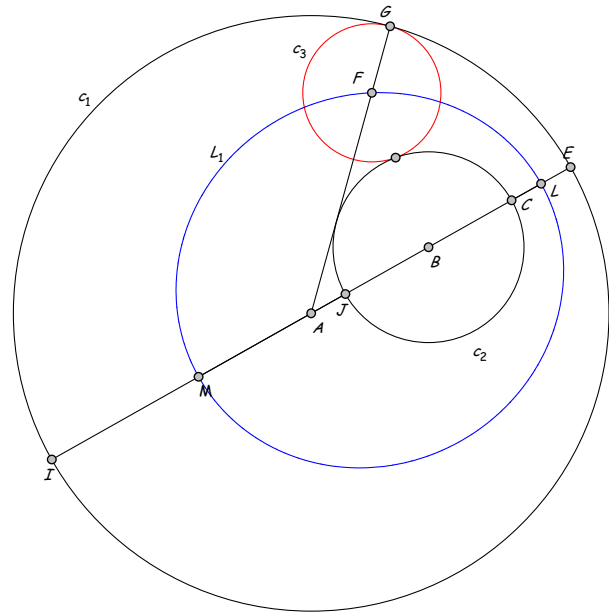
σχήμα 5

Λήμμα 5

Ο γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από δυο σταθερούς κύκλους (A, ρ_1) και (B, ρ_2) ο ένας εσωτερικός είναι έλλειψη με εστίες τα κέντρα των δυο κύκλων A και B και κορυφές τα μέσα M και L της «μικρότερης» CE και της «μεγαλύτερης» EI απόστασης των σημείων των κύκλων ή με άθροισμα $\rho_1 + \rho_2$ (σχήμα 6)

Υπάρχει και δεύτερη περίπτωση με ίδιες εστίες και με κορυφές τα μέσα των δυο «μέσα έξω τμημάτων» CM, EJ της διακέντρου ή με άθροισμα $|\rho_1 - \rho_2|$ (σχήμα 7)

Κάθε κύκλος με το κέντρο του στην έλλειψη έχει την ιδιότητα του γ.τ.



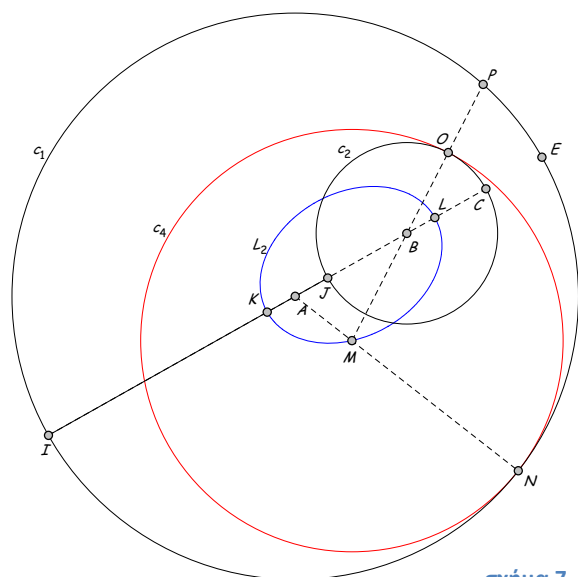
σχήμα 6

Ο κύκλος c_3 εφάπτεται εξωτερικά του c_2 και εσωτερικά του c_1 σχήμα 6

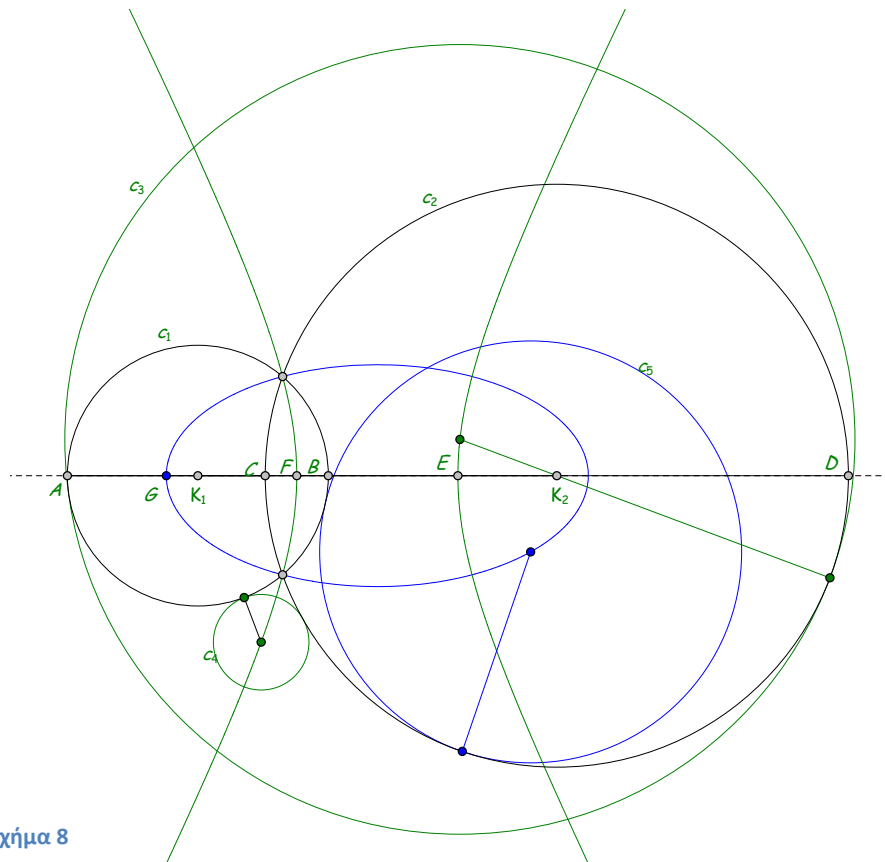
Επειδή $d = AB < |\rho_1 - \rho_2| < \rho_1 + \rho_2$ κατασκευάζονται πάντα οι δυο ελλείψεις.

Ο κύκλος c_4 εφάπτεται εσωτερικά και των δυο αρχικών κύκλων σχήμα 7

Μια τρίτη περίπτωση είναι όταν οι κύκλοι τέμνονται. Τότε η υπερβολή έχει εστίες τα δυο κέντρα των αρχικών κύκλων και κορυφές τα μέσα των τμημάτων με την μικρότερη και την μεγαλύτερη απόσταση των κύκλων ή δε έλλειψη έχει κορυφές τα μέσα των «μέσα έξω» τμημάτων. Ο ένας κλάδος της υπερβολής προς το μέρος του μεγαλύτερου κύκλου είναι ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που περιέχει τους δυο κύκλους, ο δε άλλος κλάδος εκτός του κοινού μέρους αυτών που είναι εξωτερικοί. Η δε έλλειψη είναι ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται με τον έναν εσωτερικά και με τον άλλο εξωτερικά (σχήμα 8).



σχήμα 7



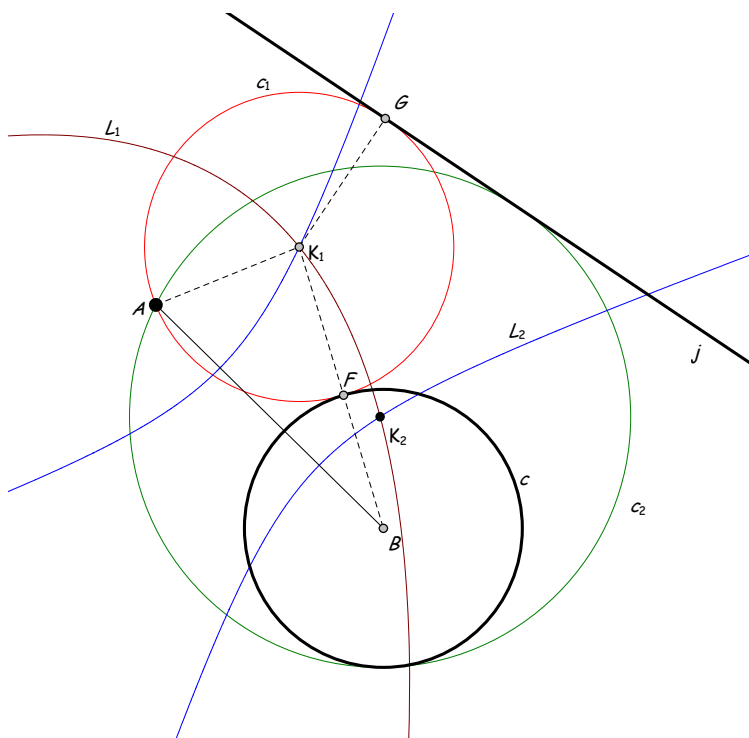
σχήμα 8

ΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

Όλες οι παρακάτω κατασκευές γίνονται με τα προηγούμενα λήμματα και σε συνδυασμό αυτών τα σχήματα έχουν γίνει με πρόγραμμα δυναμικής Γεωμετρίας Sketchpad .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

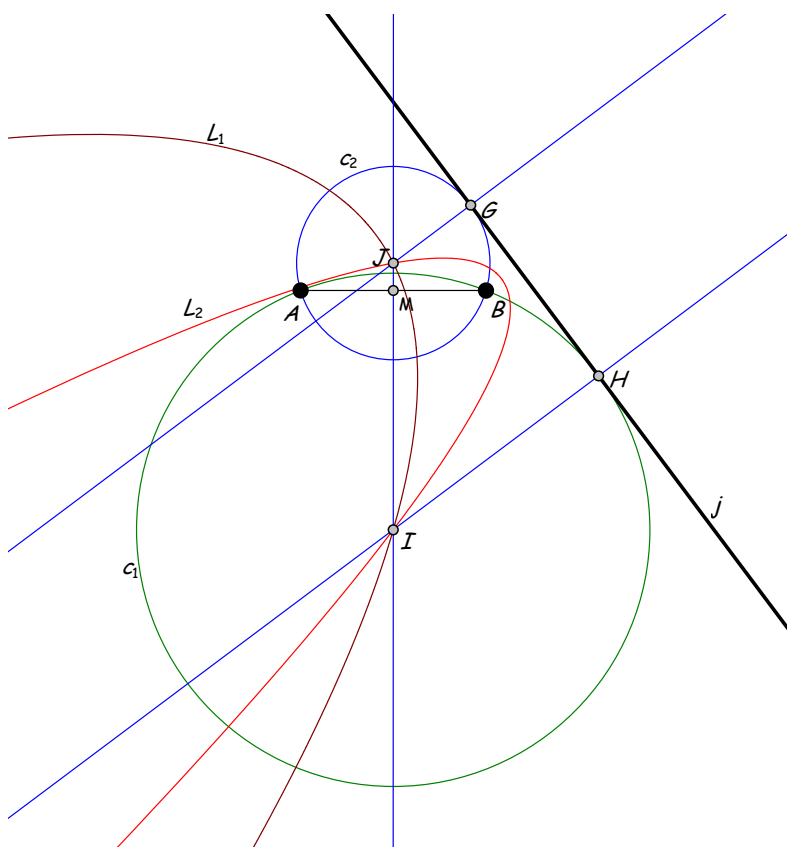
Να κατασκευαστεί κύκλος που να διέρχεται από σταθερό σημείο A και να εφάπτεται γνωστής ευθείας (j) και γνωστού κύκλου (c)



Δυο λύσεις ,με κέντρα τα σημεία τομής μιας παραβολής (L_1) και μιας υπερβολής (L_2) όπως στο λήμμα 1 και το λήμμα 2

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευαστεί
κύκλος που να
διέρχεται από δυο
σταθερά σημεία Α,Β
και να εφάπτεται
γνωστής ευθείας (j).



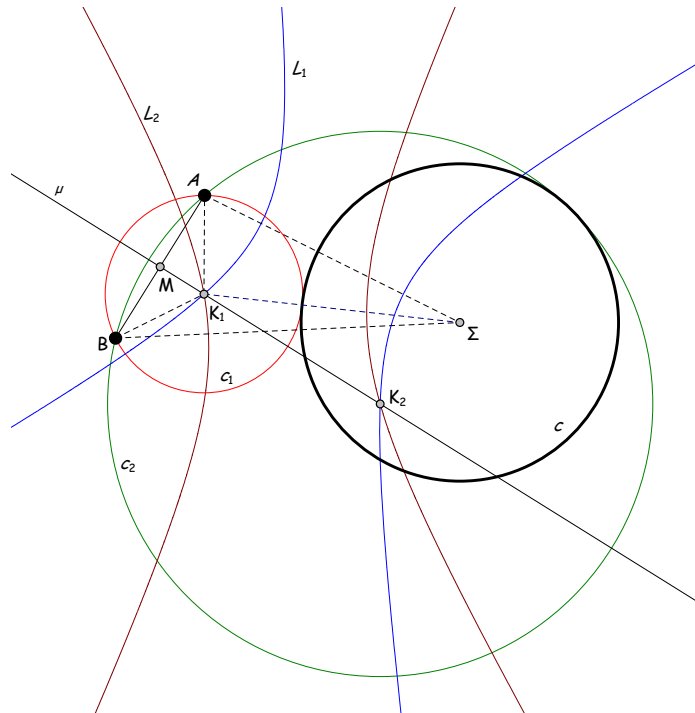
Δυο λύσεις ,με κέντρα
τα σημεία τομής μιας
παραβολής (L_1),(L_2)
και της μεσοκαθέτου
του AB όπως στο
λήμμα 1

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευαστεί κύκλος που να διέρχεται από δυο σταθερά A, B σημεία και να εφάπτεται γνωστού κύκλου (c)

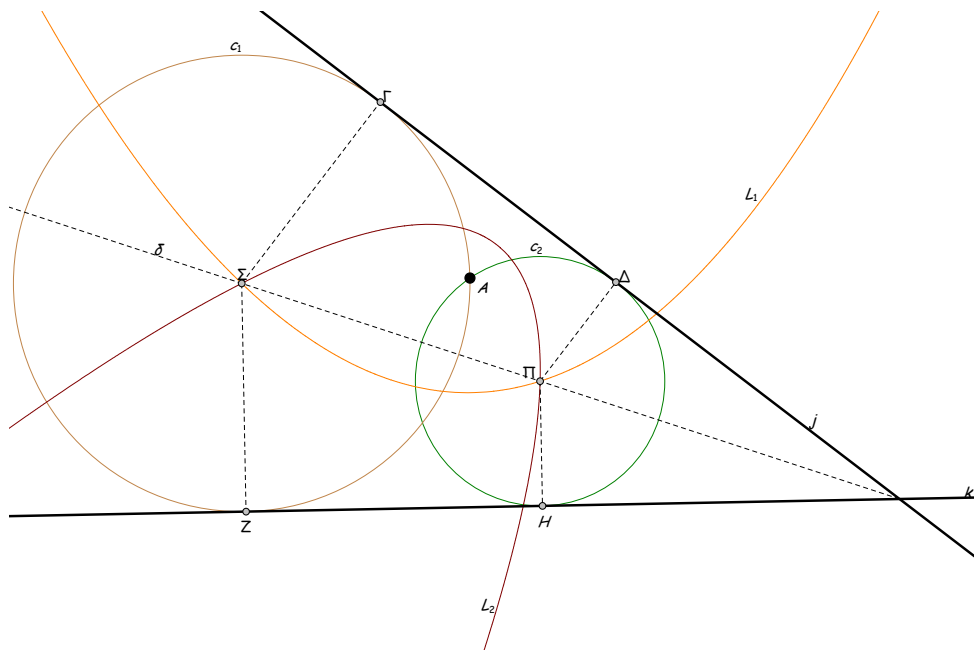
Λύσεις δυο, με κέντρα τα σημεία τομής δυο υπερβολών $(L_1), (L_2)$ όπως στο λήμμα 2 με την μεσοκάθετο του AB .

Οι δυο υπερβολές τέμνονται πάνω στην μεσοκάθετο



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

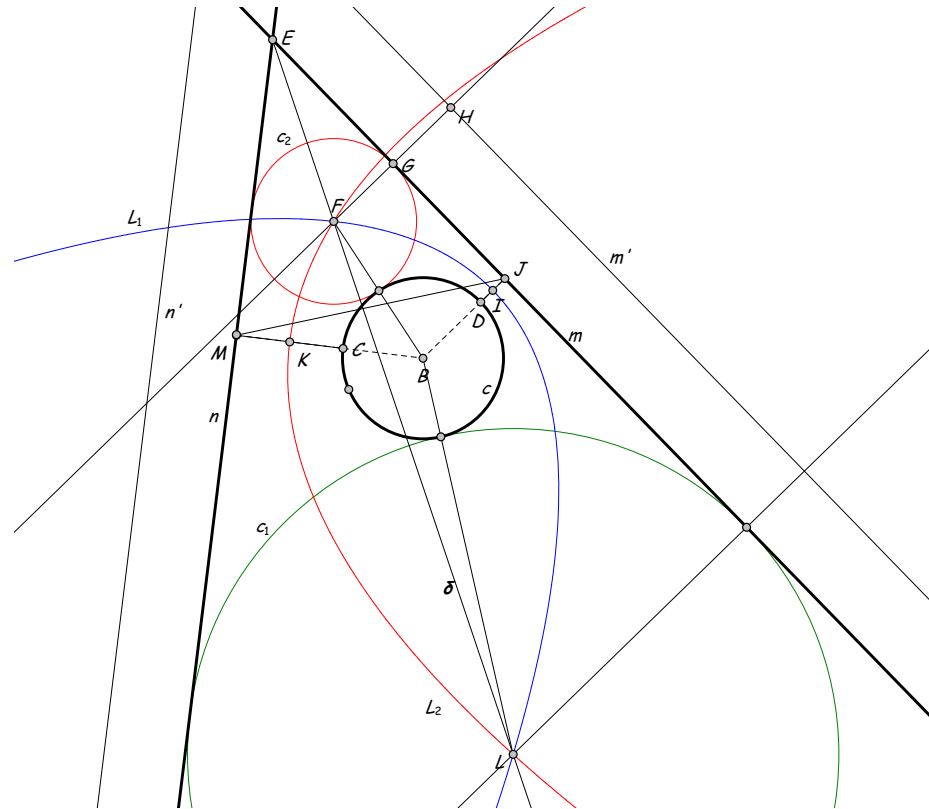
Να κατασκευαστεί κύκλος που να διέρχεται από σταθερό σημείο A και να εφάπτεται δυο γνωστών ευθειών $(j), (k)$.



Δυο λύσεις ,με κέντρα τα σημεία τομής δυο παραβολών $(L_1),(L_2)$ όπως στο λήμμα 1 και της διχοτόμου της γωνίας των δυο ευθειών στην οποία είναι το σταθερό σημείο

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

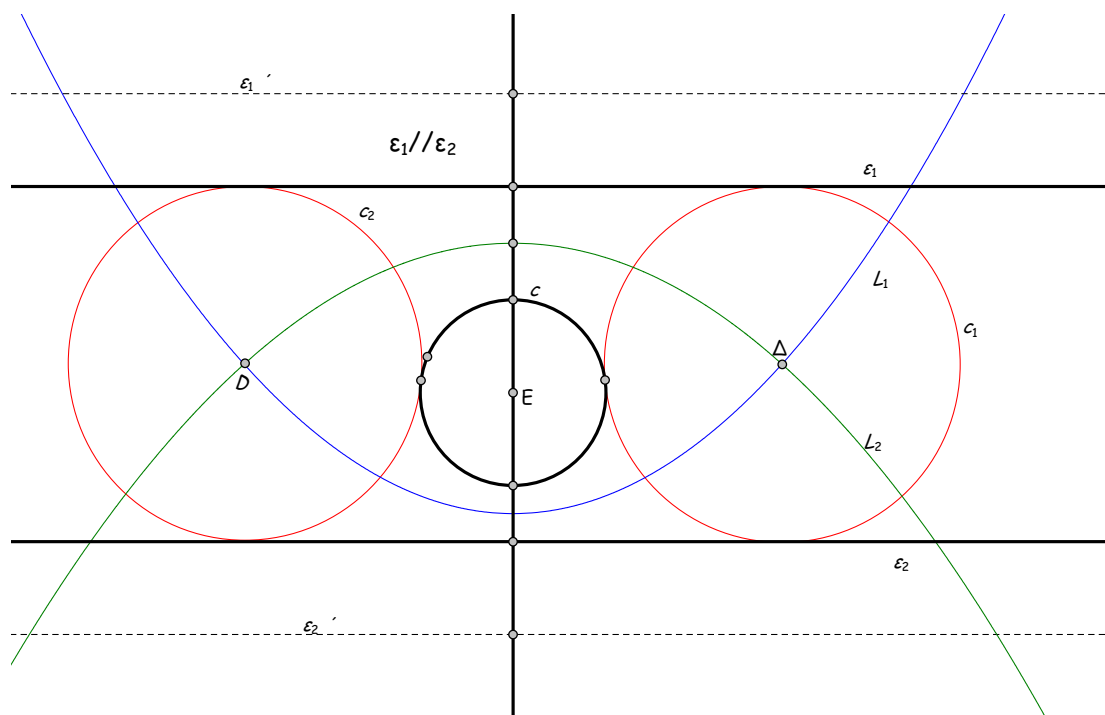
Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται δυο γνωστών ευθειών $(m),(n)$ και γνωστού κύκλου (c)



Λύσεις δυο , με κέντρα τα σημεία τομής δυο παραβολών $(L_1),(L_2)$ όπως στο λήμμα 3. Τα δυο σημεία τομής βρίσκονται πάνω στην διχοτόμο που σχηματίζουν οι δυο ευθείες

Υποπερίπτωση

Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται δυο γνωστών ευθειών $(\epsilon_1),(\epsilon_2)$ παραλλήλων και γνωστού κύκλου (c)

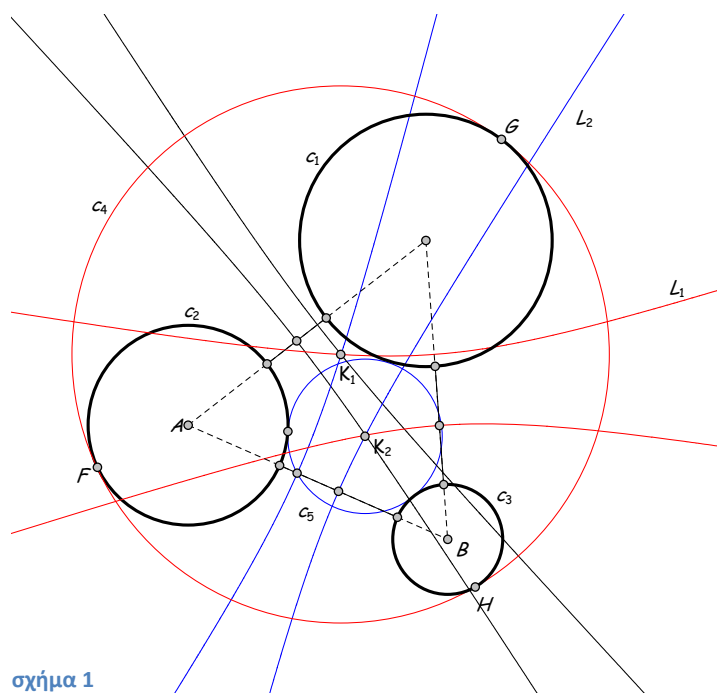


Λύσεις δυο , με κέντρα τα σημεία τομής δυο παραβολών $(L_1), (L_2)$ όπως στο λήμμα 3. Τα δυο σημεία τομής των παραβολών βρίσκονται πάνω στην μεσοπαράλληλη των ε_1 , ε_2 .

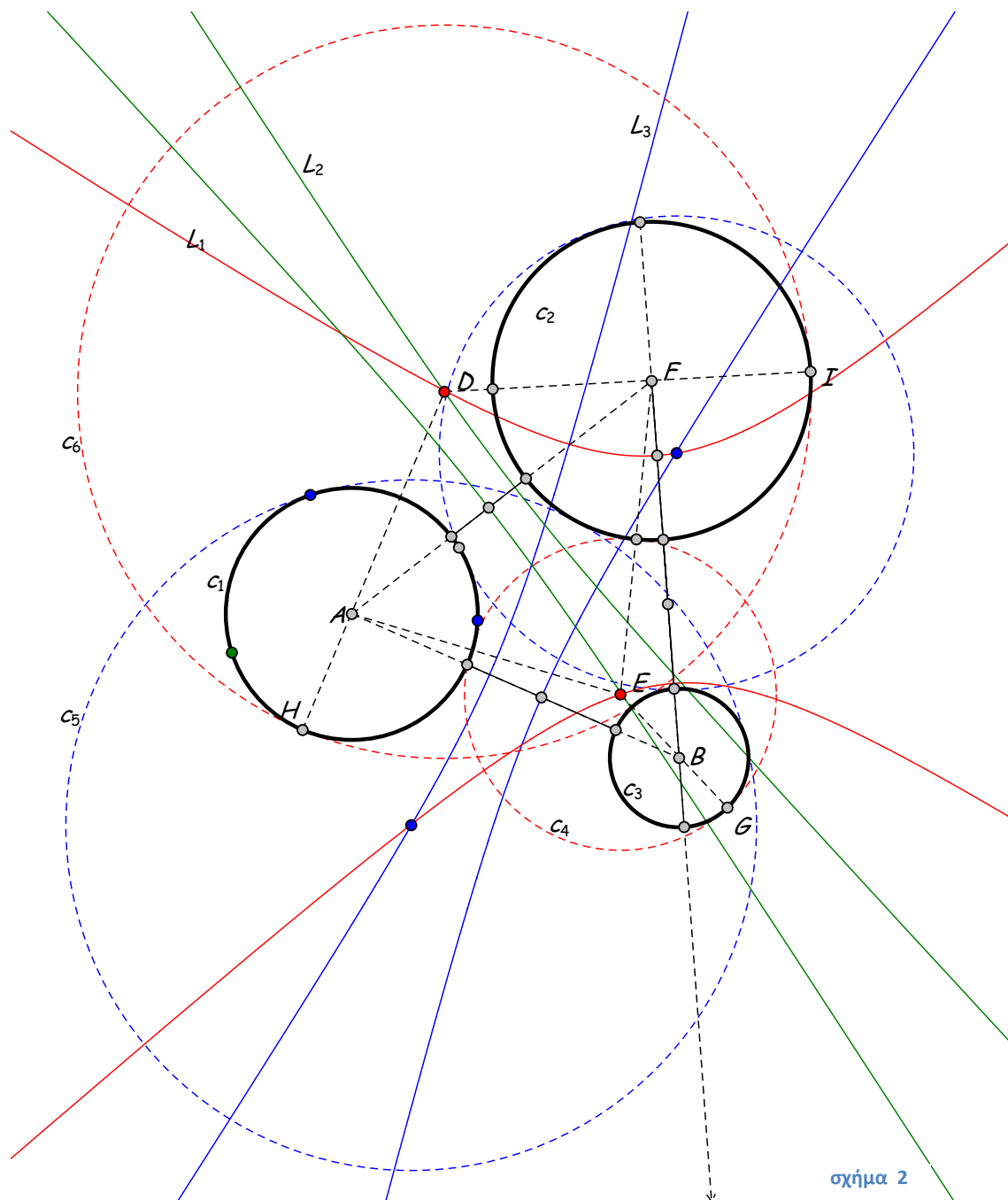
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται τριών γνωστών κύκλων $(c_1), (c_2), (c_3)$

Στη περίπτωση που οι κύκλοι είναι εξωτερικοί οι λύσεις είναι δυο , με κέντρα τα δυο σημεία τομής των υπερβολών $(L_1), (L_2)$, (L_2) όπως στο λήμμα 4 και στην πρώτη περίπτωση. Τα δυο κέντρα των κύκλων είναι τα κοινά σημεία και των τριών υπερβολών (σχήμα 1) .



Επίσης έχουμε άλλες έξι λύσεις , με κέντρα τα σημεία τομής των υπερβολών ανά δυο όπως στο λήμμα 4 πρώτη και δεύτερη περίπτωση σε συνδυασμό αυτών. Επειδή σε κάθε ζεύγος κύκλων έχουμε δυο περιπτώσεις υπερβολών, προκύπτουν συνολικά έξι κατασκευές. Από τους συνδυασμούς των περιπτώσεων με κέντρο το μέσον του «μικρότερου» τμήματος και του μέσου των «έξω μέσα» τμήματος προκύπτουν αυτές (σχήμα 2)

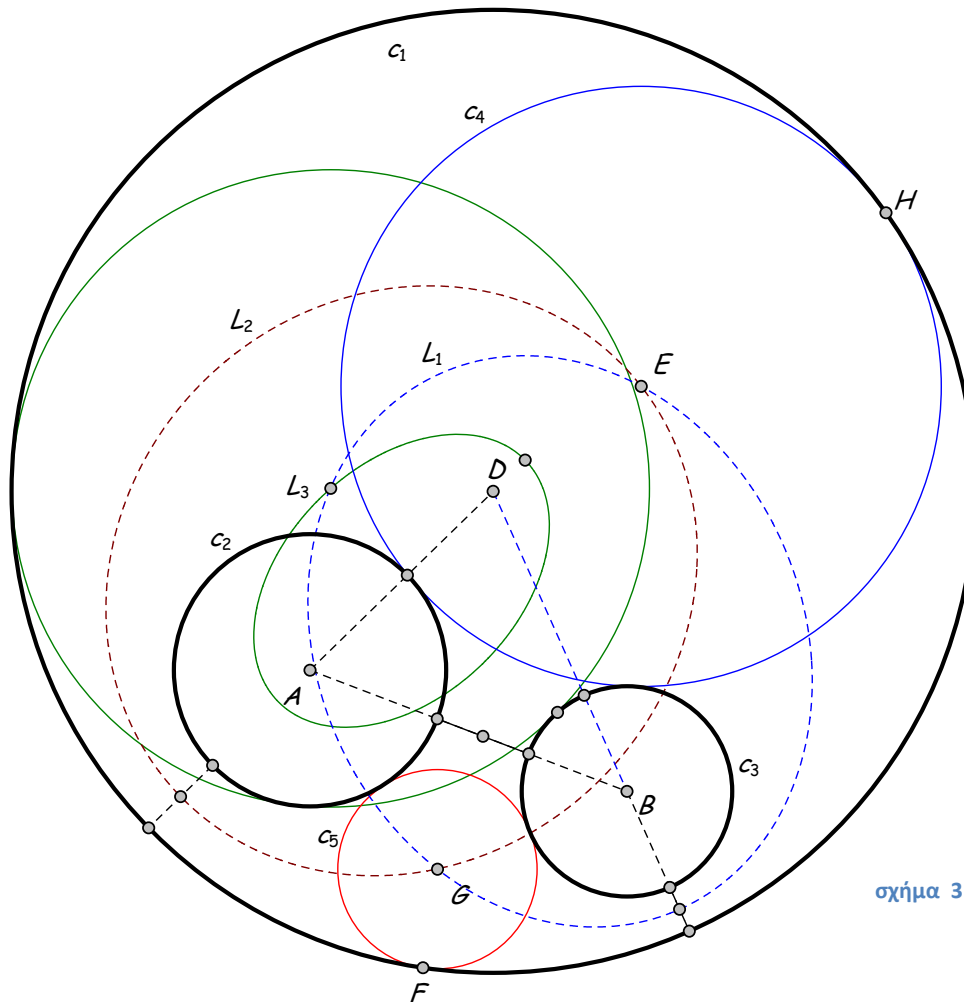


σχήμα 2

Στη περίπτωση που οι κύκλοι είναι οι δυο εσωτερικοί του τρίτου οι λύσεις είναι πέντε , με κέντρα τα σημεία τομής ελλείψεων όπως στο λήμμα 5 .Επειδή κάθε ζεύγος κύκλων έχει δυο περιπτώσεις ελλείψεων, δημιουργούνται έξι περιπτώσεις ,από τους συνδυασμούς των περιπτώσεων του λήμματος 5 εξαιρουμένης βέβαια της περίπτωσης που εφάπτονται και οι τρις εξωτερικά (σχήμα 3)

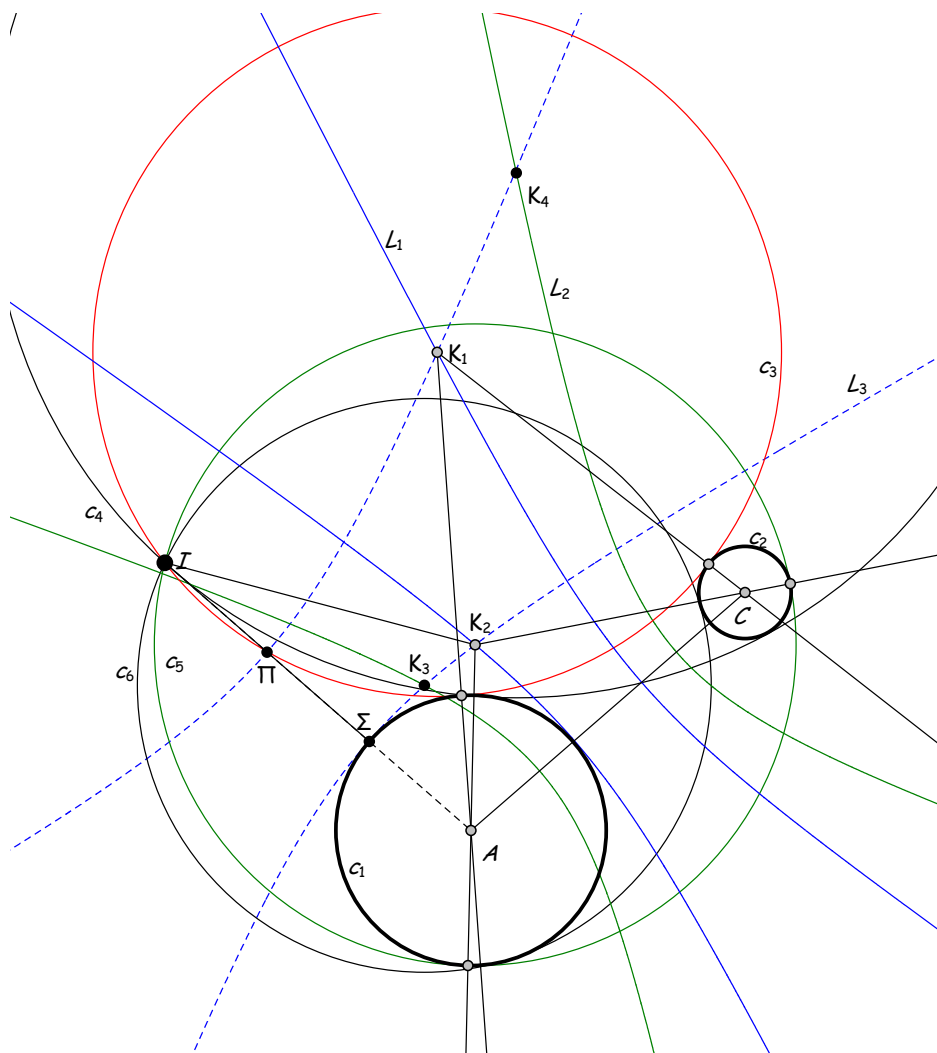
Παρατήρηση

Όταν οι κύκλοι έχουν κοινές εσωτερικές εφαπτόμενες οι οχτώ λύσεις γίνονται πέντε ,όπως η περίπτωση του τριγώνου με τους τρις παρεγγεγραμμένους και τον εγγεγραμμένο.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7

Να κατασκευαστεί κύκλος που να διέρχεται από σταθερό σημείο I και να εφάπτεται δυο γνωστών κύκλων $(c_1), (c_2)$

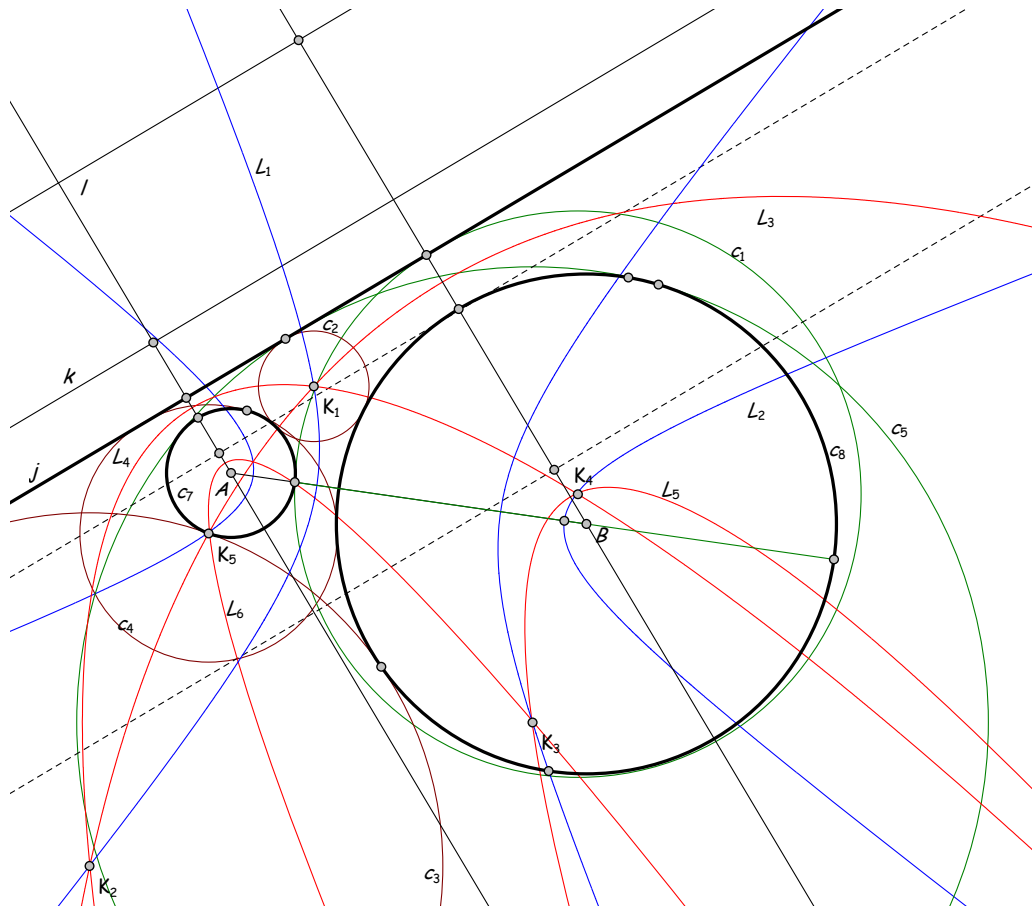


Λύσεις τέσσερις , με κέντρα τα σημεία τομής των υπερβολών $(L_1), (L_2), (L_2)$ όπως στο λήμμα 2. Επειδή ο συνδυασμός κάθε σημείου με κύκλο δίνει δυο περιπτώσεις προκύπτουν τέσσερις κατασκευές. Τα τέσσερα κέντρα βρίσκονται ως τομή των τεσσάρων υπερβολών

Στη περίπτωση που ο ένας είναι εσωτερικός ο (c_2) του (c_1) και το σημείο H εσωτερικό οι λύσεις είναι τέσσερις με κέντρα τα σημεία τομής μιας υπερβολής (L_2) και δυο ελλείψεων $(L_1), (L_3)$ όπως στο λήμμα 2 και 5. Οι περιπτώσεις των ελλείψεων και μιας υπερβολής δημιουργεί τέσσερα κέντρα

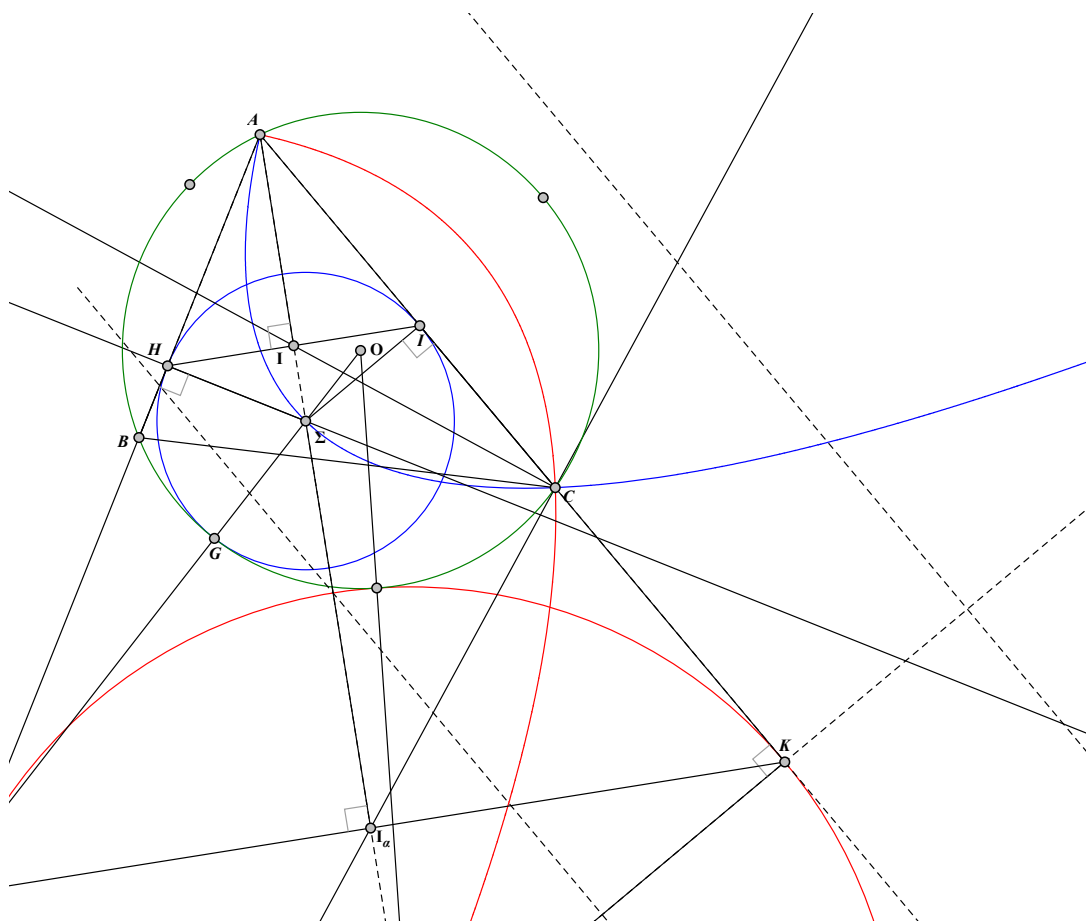
Όταν ο ένας κύκλος είναι εσωτερικός και η ευθεία τέμνει τον εξωτερικό οι λύσεις είναι τέσσερις ,με κέντρα τα σημεία τομής δυο παραβολών $(L_1),(L_3)$ και δυο ελλείψεων $(L_2),(L_4)$.

Αν οι κύκλοι είναι εξωτερικοί και η ευθεία δεν τέμνει κανέναν οι λύσεις είναι πέντε με κέντρα τα σημεία τομής τεσσάρων παραβολών και τεσσάρων υπερβολών.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

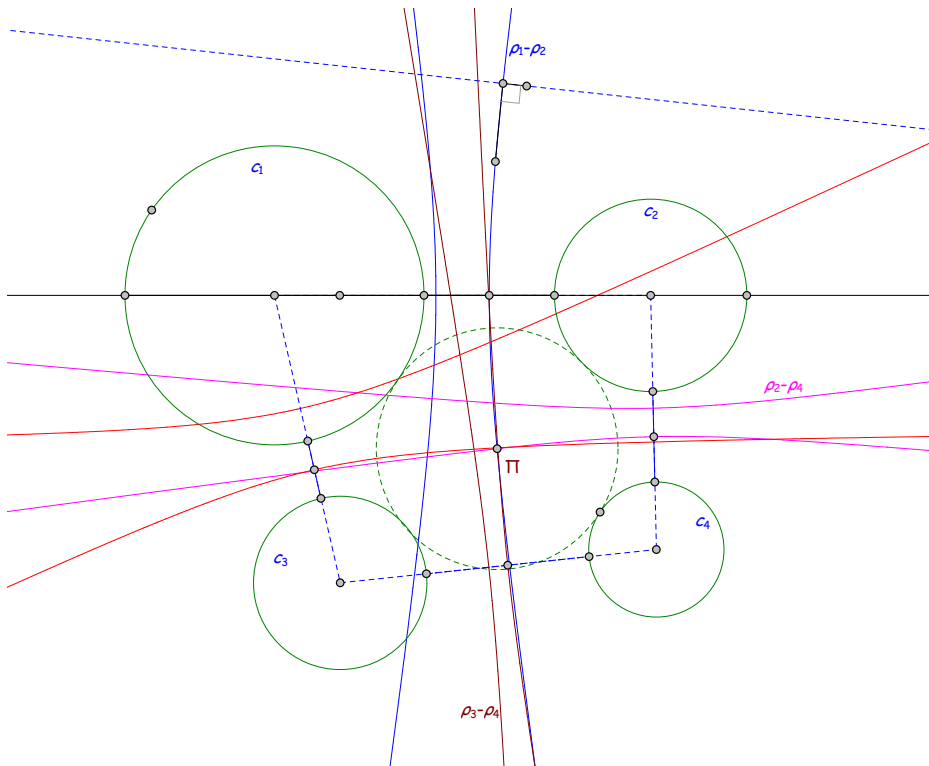
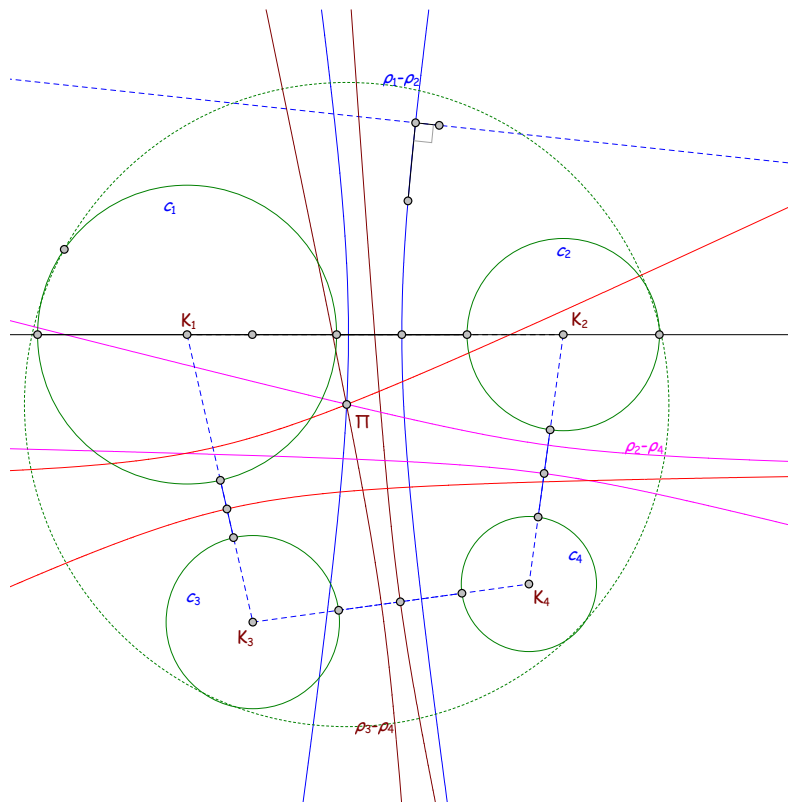
Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται των δυο πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ και του περιγεγραμμένου του κύκλου.



Λύσεις δυο , με κέντρα τα κοινά σημεία της διχοτόμου της γωνίας A με τις δυο συμμετρικές παραβολές όπως στο λήμμα 3. Συνολικά σε ένα τρίγωνο είναι τρεις εσωτερικοί και τρεις εξωτερικοί.

ΜΕΡΟΣ Γ'

Εδώ αποδεικνύεται η δυνατότητα κατασκευής εφαπτόμενων κύκλων , εξωτερικά ή εσωτερικά , τεσσάρων δοσμένων κύκλων αν και μόνο αν οι κλάδοι των τεσσάρων υπερβολών διέρχονται από το ίδιο σημείο, όπως στο λήμμα 4



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **G. Loria.** Ιστορία των Μαθηματικών Ι, ΕΜΕ, 1986.
2. **Αδαμόπουλος Α. Βισκαδουράκης Β. κ.α.** Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' Λυκείου ,ΟΕΔΒ, 2010.
3. **Αργυρόπουλος Η. Βλάμος Π. κ.α.,** Ευκλείδεια Γεωμετρία, ΟΕΔΒ ,2008.
4. **Δ. Μπουνάκης,** «Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών τομών», μεταπτυχιακή εργασία, Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2004.
(http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Bounakis_MDE.pdf)