Διαφοροποιημένη Διδασκαλία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Μαθηματικός, (MSc, PhD)
Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ

6 Οκτωβρίου 2019

Περίληψη

Το παρόν κείμενο αποτελεί τη βάση για ομώνυμη εισήγηση σε Ημερίδα του Παραρτήματος Βοιωτίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας την 6η Οκτωβρίου 2017.

Αντικείμενο της εισήγησης είναι η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου. Αποσκοπεί στην ανάπτυξη σκέψεων για εμπλοκή όσο γίνεται περισσότερων μαθητών στα Μαθηματικά ακόμα και σε περιβάλλον πίεσης από τις εξετάσεις.

Η βασική ιδέα που διέπει την εισήγηση είναι ότι με μια κατάλληλη επιλογή διαφοροποιημένου υλικού και καθηκόντων μπορεί να μεγιστοποιηθεί η συμμετοχή, να καμφθεί η παραίτηση και να επιτευχθεί ένα καλλίτερο αποτέλεσμα.

Οι απόψεις που διατυπώνονται είναι προσωπικές και δεν αποτελούν επίσημες θέσεις ή κατευθύνσεις του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

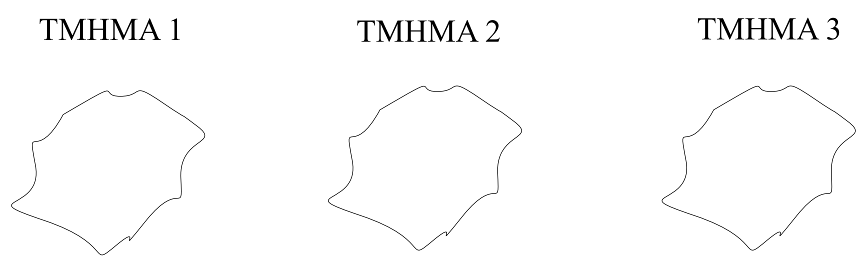
Περιεχόμενα

1 Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας.

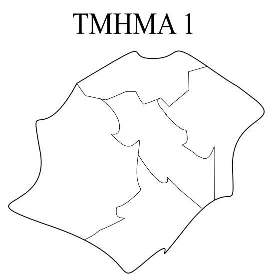
Αποτελεί κοινό τόπο ότι οι μαθητές μας αντιλαμβάνονται και προσεγγίζουν τα Μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους. Η διαπίστωση αυτή είναι ισχυρή ανεξάρτητα από τα αίτια που προβάλλονται και την τυπολογία που υιοθετείται. Με άλλα λόγια οι λόγοι αυτής της διαφορετικότητας και οι ταξινομήσεις[1] που χρησιμοποιούνται μπορούν να έχουν διαφορετικές θεωρητικές αφετηρίες αλλά η διαφορά παραμένει.

Αν δεχθούμε αυτήν την παραδοχή τότε δεχόμαστε ότι η διδασκαλία οφείλει να προσαρμόζεται:

- στο μαθητικό κοινό που απευθύνεται όταν εκείνο αλλάζει (λ.χ. διαφορετικά τμήματα)



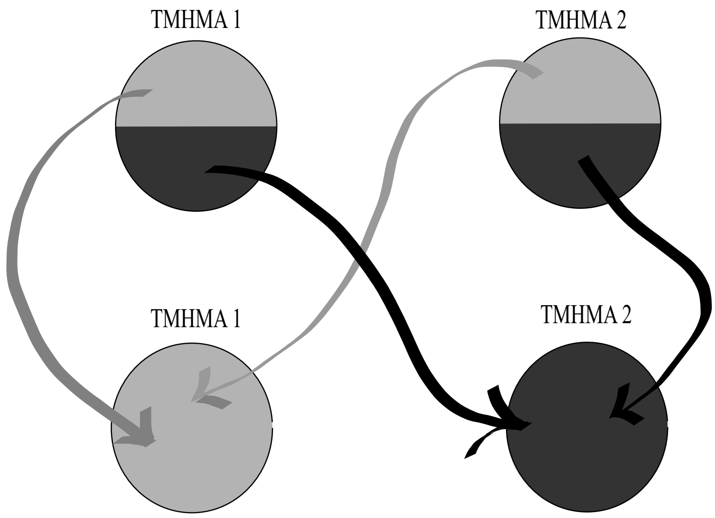
- σε μέρη του ίδιου κοινού όταν αυτά έχουν διαφορετικές δυνατότητες και ενδιαφέροντα.



Ωστόσο υπάρχουν κάποιες δυσκολίες. Είμαστε μάλλον πρόθυμοι να θεωρήσουμε ότι η διδασκαλία μπορεί να αλλάζει στην πρώτη περίπτωση ενώ είμαστε μάλλον απρόθυμοι να δεχτούμε το ίδιο στην περίπτωση μιας λεπτότερης υποδιαίρεσης όπως αυτή της δεύτερης περίπτωσης. Το σύνηθες αίτημα είναι να αποκτήσουμε χωριστά τμήματα μέσω ομογενοποίησης δηλαδή την δημιουργία νέων τμημάτων από τα παλιά διατηρώντας περίπου σταθερές τις παρακάτω παραμέτρους:

[1] Βλ.και α) Diether Hopf *Διαφοροποίηση της σχολικής εργασίας.* Μετ. Βασιλική Δεληγιάννη-Κουϊμτζή, Αφοι Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1982
β) J. Terwel *Curriculum differentiation: multiple perspectivesand developments in education* Journal of Curriculum Studies 37, 6, 2005, σελ. 653–670

- κάποια ατομικά χαρακτηριστικά
- ενδιαφέροντα και ανάγκες



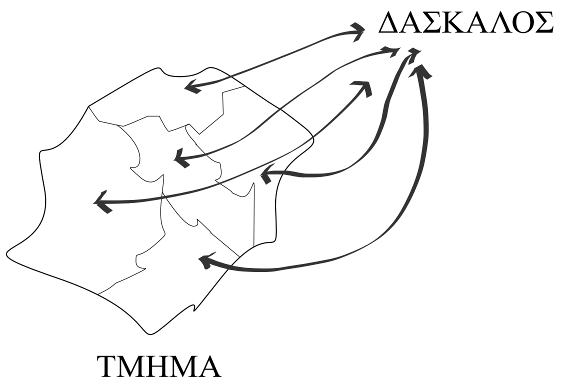
Λίγο πολύ είναι αυτό που ονομάζεται «χωρισμός σε επίπεδα». Στην παραπάνω μέθοδο ομογενοποίησης μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

1. Τα ατομικά χαρακτηριστικά δεν είναι καλώς ορισμένα.
2. Οι ατομικές ανάγκες αλλάζουν.

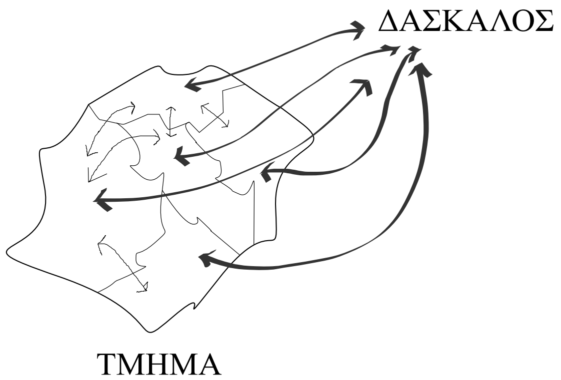
Αλλά ακόμη και αν υποτεθεί ότι έχουμε καλώς ορισμένα μόνιμα ατομικά χαρακτηριστικά η ομογενοποίηση δεν είναι πάντα εφικτή (τεχνικά και οικονομικά εμπόδια όπως πρόγραμμα, μέγεθος τμημάτων κ.α.) καθώς και κοινωνικά εμπόδια (αντιδράσεις κ.α.). Την πρακτική της ομογενοποίησης έχουν την δυνατότητα να εφαρμόζουν μεγάλες σχολικές μονάδες της ιδιωτικής εκπαίδευσης.

Αν δεχθούμε ότι κάποιου είδους διαφοροποίηση είναι απαραίτητο, τότε η μόνη λύση είναι τα «τμήματα» διαφοροποίησης να είναι απλώς υποσύνολα του ιδίου αρχικού τμήματος με άλλα λόγια να χρησιμοποιείται μια εύκαμπτη δομή *διαφοροποίησης διδασκαλίας*[2]μέσα στο ίδιο το τμήμα. Ανάλογα με τον τρόπο διδασκαλίας που υιοθετείται μπορούμε να έχουμε αλληλόδραση μεταξύ των ομάδων και του δασκάλου:

[2] Για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας βλ. σχετικά:
α) Carol Ann Tomlinson *Διαφοροποίηση της εργασίας στην αίθουσα διδασκαλίας* Μετ. Χρήστος Θεοφιλίδης, Δέσποινα Μαρτίδου-Φορσιέ, Εκδ, Γρηγόρη, 2010
β) Paul S. George *A Rationale for Differentiating Instruction in the Regular Classroom*, Theory Into Practice, 44, 3, 2005 σελ. 185-193,
γ) Tim O'Brien , Dennis Guiney *Differentiation in Teaching and Learning* Continuum 2006 (2001)
δ) Pearl Subban *Differentiated instruction: A research basis* International Education Journal, 7(7), 2006 σελ. 935-947



ή και, ένας πιο τολμηρός τρόπος, αλληλόδραση και μεταξύ των ομάδων:



Το τελευταίο σχήμα είναι πιο σύνθετο αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι κάθε μαθητής έχει ποικίλους γνωστικούς πόρους:

- Από τον δάσκαλο
- Από τους συμμαθητές της ομάδας του και
- Από τους συμμαθητές του των άλλων ομάδων.

ο δε δάσκαλος είναι με την σειρά του μανθάνων δάσκαλος που αντλεί εμπειρίες και από τους μαθητές του.

Ας σημειωθεί ότι η ομαδοποίηση της τάξης δεν είναι πάγια και μπορεί να αλλάζει με τον χρόνο και μόνο ένα μέρος της είναι εμφανές.

Αν και η διαφοροποίηση της διδασκαλίας είναι στο επίκεντρο των συζητήσεων ως ιδέα δεν είναι νέα. Χρονολογείται από την εποχή που ένας δάσκαλος ήταν αναγκασμένος να διδάσκει μία τάξη που απαρτίζονταν από μαθητές διαφόρων ηλικιών και με διαφορετικό γνωστικό υπόβαθρο. Η βασική παραδοχή τότε αλλά και τώρα είναι ότι πρέπει ο δάσκαλος να εστιάσει στον κάθε μαθητή χωριστά ή σε διαφορετικές ομάδες μαθητών. Όπως εύστοχα γράφει η Tomlinson:[3]

[3] Tomlinson ο.π. σελ. 8

> Στις αίθουσες διδασκαλίας στις οποίες γίνεται διαφοροποίηση της εργασίας οι εκπαιδευτικοί αρχίζουν από το σημείο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές και όχι από την πρώτη σελίδα του σχολικού εγχειριδίου. Αποδέχονται και χτίζουν πάνω στην αρχή ότι οι μαθητές διαφέρουν μεταξύ τους σε μεγάλο βαθμό και σε διαφορετικά θέματα.

Επίσης μεμονωμένες τεχνικές της διαφοροποίησης της διδακαλίας δεν είναι άγνωστες στους εκπαιδευτικούς: Η επανάληψη ενός μέρους του μαθήματος με «άλλα λόγια», η αλλαγή των δεδομένων σε μια άσκηση, η ενασχόληση με την σκέψη μεμονομένων μαθητών, η εκτός προγράμματος επιστράτευση σχημάτων η παραδειγμάτων εντάσσονται στην λογική ότι δεν απευθυνόμαστε σε άνα «μέσο μαθητή» αλλά σε πολλά φυσικά πρόσωπα.

Όμως η διαφοροποίηση διδασκαλίας είναι κάτι περισσότερο από μία κατ΄ οικονομίαν λύση που επιβάλλεται από ιδιαίτερες διδακτικές συνθήκες. Αποτελεί και ένα εγχείρημα για την αντιμετώπιση της εκπαιδευτικής ανισότητας. Δηλαδή αποτελεί μια εκπαιδευτική απάντηση στο πολιτικό επίταγμα να μαθαίνουν όλα τα παιδιά. Ανεξάρτητα από ηλικία, εκπαιδευτικό παρελθόν και πολιτισμικό υπόβαθρο.

Η αλήθεια είναι πως οι περισσότερες επεξεργασμένες προτάσεις διαφοροποίησης της διδασκαλίας αφορούν κυρίως το Δημοτικό ή το Γυμνάσιο ή αναφέρονται σε ειδικές κατηγορίες τμημάτων όπως τμήματα ενηλίκων ή τμήματα με μεγάλη συγκέντρωση μαθητών από διαφορετικά εθνοτικά και πολιτισμικά περιβάλλοντα. Εν τούτοις συγκροτημένες προτάσεις διαφοροποίησης μας έρχονται και για μεγαλύτερες μαθητικές ηλικίες και μάλιστα με μέριμνα των εκπαιδευτικών αρχών ορισμένων χωρών (λ.χ. Αυστραλία, Καναδάς).

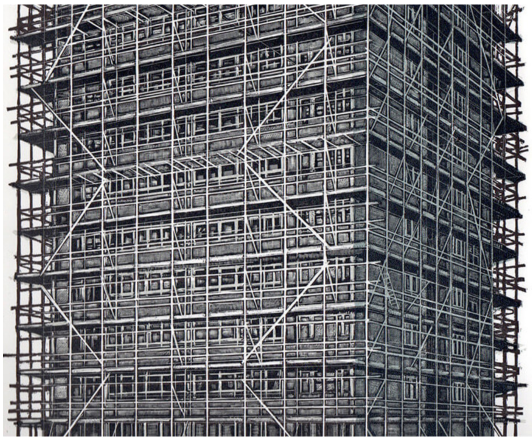
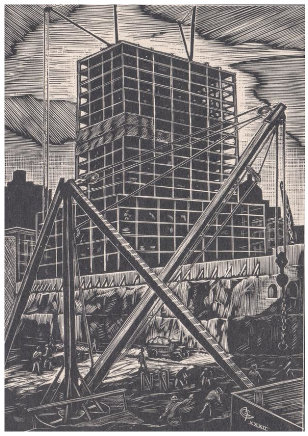
2 Σκαλωσιές.

Σχετική με την διαφοροποίηση είναι η πρακτική της σκαλωσιάς (scaffolding).[4] Πρόκειται για την σύνθεση διδακτικών «υποστηριγμάτων» ποικίλης μορφής που αποσκοπούν στο να υποβοηθήσουν τους μαθητές να πετύχουν κάποιους μαθησιακούς στόχους (κατανόηση θεωρίας, εκμάθηση κάποιας διαδικασίας, επίλυσης μια άσκησης κ.α.). Η πρακτική της σκαλωσιάς εφαρμόζεται τόσο στην περίπτωση που επιστημολογική βάση της διδασκαλίας είναι ότι η μαθηματική γνώση προϋπάρχει και προσεγγίζεται όσο και στην περίπτωση που επιστημολογική αφετηρία είναι ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται. Σχηματικά μπορούμε

[4] Βλ. α) Mary Catherine Moran *Differentiated Litteracy Coaching. Scaffolding for Student and Teacher Success* Association for Supervision and Curriculum Development 2007

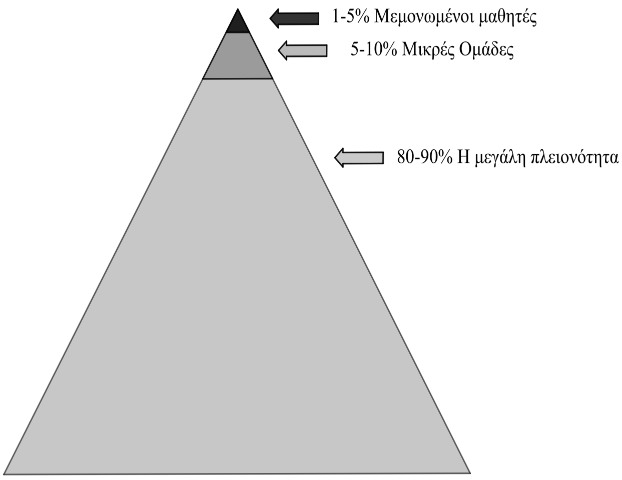
β) Julia Anghileri *Scaffolding Practices that Enhance Mathematics Learning* Journal of Mathematics Teacher Education 9, 2006 σελ. 33–52

γ) Εμμανουήλ Νικολουδάκης *Δημιουργία Σκαλωσιάς με τη βοήθεια των ΤΠΕ σε ένα Δομημένης Μορφής Φύλλο Εργασίας* Εισήγηση στο Εργαστήριο του 14ου Πανελληνίου Συνεδρίου Πληροφορικής, Τρίπολη, 2010 να φαντασθούμε στην πρώτη περίπτωση ότι οι σκαλωσιές υποβοηθούν την προσέγγιση ενός έτοιμου οικοδομήματος και στην δεύτερη στην κατασκευή του:

3 Κάποια ποσοτικά και ποιοτικά στοιχεία.

Μία «ήπια» εκδοχή διαφοροποίησης που ξεκινά με την παραδοχή ότι οι μαθητές τους οποίους αφορά η διαφοροποίηση θα είναι σχετικά λίγοι περιλαμβάνει τρεις κερκίδες - βαθμίδες (tiers) με ποσοστώσεις 80-90% 5-10% και 1-5%. Το μεγάλο ποσοστό αφορά στο κοινό πρόγραμμα και τα μικρότερα στις διαφοροποιήσεις. Σημειώστε ότι το φθίνον ποσοστό δεν σημαίνει κατάνάγκην μείωση της δυσκολίας ή αύξηση της. Είναι δηλωτικό της ανάγκης άλλων διδακτικών χειρισμών ή εκπαιδευτικών αποφάσεων.



Η διαφοροποιημένη διδασκαλία με την τρέχουσα έννοια προϋποθέτει ότι η διαφοροποίηση θα γίνεται στο ίδιο τμήμα και ο εκάστοτε διαχωρισμός των μαθητών θα είναι πρόσκαιρος και ανάλογος του θέματος. Το σύνηθες είναι να γίνεται με μικρές ομάδες ή με «σταθμούς» ενδιαφερόντων (κυρίως για τις μικρές ηλικίες μαθητών). Συχνά τίθενται θεωρητικές προϋποθέσεις που έχουν να κάνουν με διαφορετικούς μαθησιακούς τύπους βάσει των οποίων επιλέγονται για να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές στρατηγικές ανά ομάδα και ενίοτε διαφορετικά μέσα (λογισμικό, υλικά, οπτικοακουστικό υλικό κ.α.).

Δεν υπάρχει φυσικά ενιαία αντίληψη του τι είναι και πως επιτυγχάνεται η διαφοροποιημένη διδασκαλία. Ωστόσο κάποια στοιχεία είναι κατά βάσιν κοινά στην βιβλιογραφία:

1. Προσδιορισμός του αντικειμένου που θα διδαχθεί, Στοχοθεσία.
2. Προσδιορισμός της ετοιμότητας και των ενδιαφερόντων των μαθητών σε σχέση με το αντικείμενο που θα διδαχθεί.
3. Καθορισμός τρόπων προσέγγισης ανάλογα με την ετοιμότητα, τα ενδιαφέροντα και ενδεχομένως τον μαθησιακό τύπο των μαθητών.
4. Εργασία των μαθητών με τους τρόπους του 3.
5. Συζήτηση στην τάξη των τρόπων εργασίας.
6. Αξιολόγηση.
7. Επισκόπηση με την τάξη.

Επειδή, ως είναι φυσικό, δεν υπάρχει ενιαία αντίληψη για το τι είναι και πως εφαρμόζεται η η διαφοροποιημένη διδασκαλία μερικές φορές η οριοθέτηση της έννοιας γίνεται και με παραδείγματα. Μία τέτοια οριοθέτηση προτείνει η Christina Yu[5] έχει συνοψίσει μερικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα της διαφοροποιημένης διδασκαλίας:

Παραδείγματα	Αντιπαραδείγματα
Πολλαπλά σετ ερωτήσεων	Οι καλοί μαθητές διδάσκουν τους άλλους
Προσωποποιημένα πακέτα «θεραπείας» και «εμπλουτισμού»	Στους προχωρημένους δεν δίνουμε δουλειά στο σπίτι
Προσαρμοσμένη αξιολόγηση με εύκολους και δύσκολους στόχους	Οι προχωρημένοι μαθητές απαλλάσσονται από την παρακολούθηση
$1-1$ αντιστοίχιση μαθητών με προβλήματα	Ομαδοποίηση σε τάξεις με επίπεδα
Σχηματισμός μικρών ομοιογενών ομάδων	Επιτρέπουμε στους μαθητές να επιλέγουν βοηθήματα

Μερικά στοιχεία - συντεταγμένες της διαφοροποιημένης διδασκαλίας είναι τα ακόλουθα:

[5] `https://www.teachthought.com/pedagogy/what-is-differentiated-instruction/`

- Άτομα
- Περιεχόμενο
- Μέθοδος
- Χρόνος

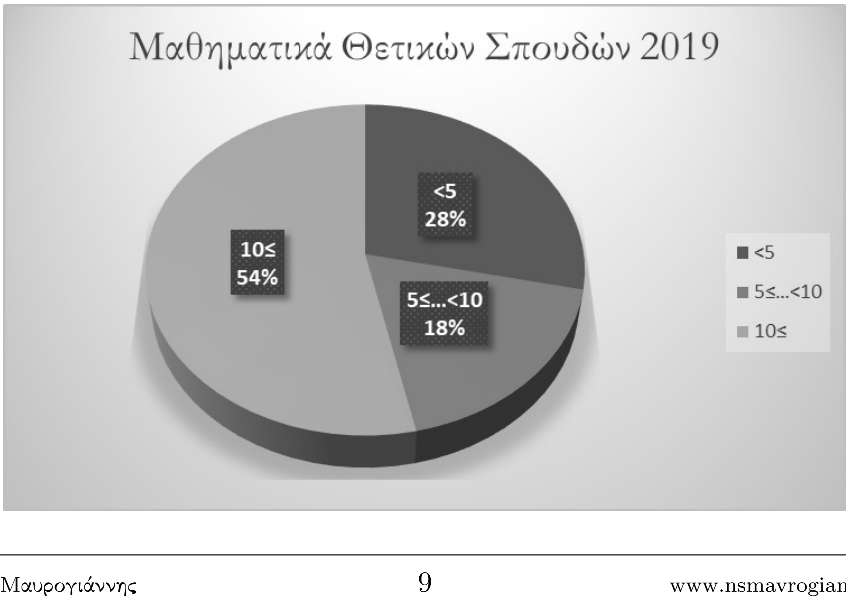
που συνοψίζουν το ποιοι διδάσκονται τι, με ποια μέθοδο και πότε.

4 Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις.

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του λυκείου, ως είναι φυσικό, προσκρούει σε πολλές, πρόσθετες, δυσκολίες:

1. Στις παγιωμένες αντιλήψεις των προηγουμένων χρόνων για το «πως γίνεται το μάθημα».
2. Στην ανάγκη να καλυφθεί μία συγκεκριμένη ύλη σε μία σχετικά μικρή ωφέλιμη χρονική περίοδο.
3. Στην ανάγκη να εξασφαλισθεί η «επιχειρησιακή» αποτελεσματικότητα στις επερχόμενες εξετάσεις.

Οι παραπάνω δυσκολίες αποτελούν εμπόδια για την εφαρμογή εκτεταμένων τεχνικών διαφοροποίησης. Ωστόσο αν το μείζον είναι να πετύχουν οι μαθητές μας το καλλίτερο, τότε ρεαλιστικές εφαρμογές διαφοροποιημένων τεχνικών έχουν νόημα. Σύμφωνα με τα στατιστικά στοιχεία περίπου ένας στους τρεις μαθητές Θετικών στουδών και ένας στους δύο από την κατεύθυνση Οικονομίας Πληροφορικής βαθμολογείται με κάτω από 5 δηλαδή τοποθετείται στο κατώτερο τέταρτο της βαθμολογικής κλίμακας.



Αυτό δεν συμβαίνει σε όλα τα παιδιά για τους ίδιους λόγους αλλά δύο βασικοί είναι:

- Μαθηματική ανετοιμότητα από προηγούμενες τάξεις: ελλείψεις-κενά καθώς και αρνητική στάση για τα Μαθηματικά.
- Προϊούσα παραίτηση από την προσπάθεια στα Μαθηματικά.

Οι δύο αυτοί παράγοντες δεν είναι ανεξάρτητοι. Μάλιστα ο ένας ενισχύει την δράση του άλλου: Δυσκολίες στα Μαθηματικά βοηθούν την παραίτηση η δε παραίτηση ακυρώνει ήδη κατακτημένες στο παρελθόν γνώσεις και ικανότητες.

Μία αρχή για την διάσπαση αυτού του φαύλου κύκλου είναι η επέμβαση πρώτα στο ζήτημα της ετοιμότητας με την συμπλήρωση γνώσεων και διαδικασιών και την ενασχόληση με υλικό κατάλληλο με την υπάρχουσα γνωστική υποδομή και όχι με κάποια ιδεατή που υποδεικνύει η προαγωγή από την Β′ Λυκείου στην Γ′ Λύκείου. Αυτό σημαίνει ότι εν ανάγκη θα πραγματοποιείται προσαρμογή του υλικού και θα χρησιμοποιείται πολλαπλό υλικό.

Είναι προφανές ότι στην συγκεκριμένη τάξη δε μπορούν να γίνουν μεγάλες αλλαγές απο πλευρά του δασκάλου. Ωστόσο αλλαγές μπορούν να γίνουν:

Στην πλαισίωση της θεωρίας. Γενικά το σχολικό βιβλίο χρειάζεται πλαισιώσεις με διάφορα στοιχεία.[6] Ωστόσο εδώ αναφερόμαστε σε συγκεκριμένες προσθήκες κατά διδασκαλία της θεωρίας. Ενδεικτικά μερικές:

1. Κάθε παρουσίαση της νέας θεωρίας στηρίζεται σε προγενέστερες έννοιες. Μια σύντομη ad hoc υπενθύμιση τους ίσως με κάποια παραδείγματα ενδέχεται να βοηθήσει κάποιους μαθητές να προχωρήσουν ευχερέστερα.

[6] Βλ. Ν.Σ. Μαυρογιαννης *Πλαισιώσεις του σχολικού βιβλίου.* Κείμενο ομιλίας που δόθηκε στην Θεσσαλονίκη την 12-12-2016 σε ημερίδα του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της ΕΜΕ

2. Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της θεωρίας. Κάποιοι μαθητές χρειάζονται περισσότερα από τους άλλους όπως επίσης και αρκετά σχήματα για την υποβοήθηση της κατανόησης.
3. Οι επεκτάσεις της θεωρίας καθώς και οι θεωρητικές συνδέσεις βοηθούν στην εμβάθυνση ιδίως τους πιο κατατοπισμένους μαθητές.

Την μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις. Οι ασκήσεις είναι η ευκαιρία για να κάνουν τα παιδιά Μαθηματικά και πρακτικά ο μόνος τρόπος για να μάθουν Μαθηματικά. Η επιλογή των ασκήσεων έχει μεγάλη σημασία. Δεν είναι όλες οι ασκήσεις της ίδιας αξίας ούτε και την ίδιας δυσκολίας. Η αξία μια άσκησης έγκειται:

- Στις δυνατότητες που δίνει στο μαθητή να σκεφτεί να ενεργήσει και με την βοήθεια της να κατανοήσει έννοιες και να εμπεδώσει διαδικασίες.
- Ειδικά από την σκοπιά της διαφοροποίησης της διδασκαλίας σημαντικό στοιχείο είναι η επεκτασιμότητα της άσκησης σε απλούστερα ή συνθετότερα καθήκοντα ώστε να καλύψει τις δυνατότητες του συνόλου των μαθητών. Αποτελεί μια πάγια αρχή στην επίλυση προβλημάτων ότι η αντιμετώπιση ενός προβλήματος επιτυγχάνεται συχνά με το στήσιμο μια σκαλωσιάς από ένα ή περισσότερα απλούστερα ή συναφή προβλήματα.[7] Μπορεί να μην είναι απαραίτητη για όλους τους μαθητές αλλά για κάποιους μπορεί να είναι.
- Επίσης ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ασκήσεις που προωθούν την συνοχή[8], που «δένουν» αυτά που διδάχθηκαν οι μαθητές.

5 Παραδείγματα

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως. Αποσκοπούν στο να αναδείξουν την βασική ιδέα μίας «ήπιας» διαφοροποιημένης παρέμβασης στο επίπεδο της θεωρίας (Παράδειγμα 6) αλλά και των ασκήσεων (Παραδείγματα 1-5). Οι ασακήσεις στο εκπαιδευτικό μας σύστημα καταλαμβάνουν μεγάλη έκταση στην ημερήσια διδασκαλία. Εν τούτοις δεν φαίνεται η ενασχόληση με τις ασκήσεις να υπερβαίνει την εκμάθηση ανούσιων και ενίοτε αχρείαστων τεχνικών που διδάσκονται μόνο και μόνο για να είναι οι μαθητές έτοιμοι να αντιμετωπίσουν κάποιες «μορφές» ασκήσεων. Όμως οι ασκήσεις μπορούν να αποτελέσουν οργανικό μέρος της θεωρίας.

[7] Βλ. G. Polya *How to Solve it?* . Princeton, 1985 σελ. 46 ή
G. Polya *Πως να το λύσω;* Μετ. Ξανθή Ψυακκή Καρδαμίτσα, 1998 σελ. 85

[8] Σχετικά: Ν.Σ. Μαυρογιαννης *Συνέχεια και Συνοχή στα Σχολικά Μαθηματικά.* Κείμενο ομιλίας που δόθηκε την 12-4-2019 σε ημερίδα του Βαρβακείου Λυκείου είς μνήμην του Β. Κατσαργύρη

Μπορούν να την επεκτείνουν, να της προσφέρουν συνοχή και να την φωτίσουν. Η επιλογή των 5 ασκήσεων των παραδειγμάτων, που προέρχονται όλες από τα σχολικά βιβλία έγινε με αυτό τον γνώμονα.

Αν υποθέσουμε πως τα σχολικά βιβλία είναι η βάση μελέτης και πως ευκταίο είναι να μην υπολείπονται οι γνώσεις των μαθητών εκείνων που εκτίθενται στα σχολικά βιβλία τότε έχουμε και μία βασική γραμμή διδακτικής πλεύσης. Διαφοροποιούμε την διδασκαλία ώστε εί δυνατόν όλοι οι μαθητές να μπορούν να προσεγγίζουν τα μαθηματικά φαινόμενα των ασκήσεων, έστω και σε μια απλοποιημένη εκδοχή και επιπλέον να δοθεί η δυνατότητα στους πιο κατατοπισμένους μαθητές να ικανοποιήσουν τις ανάγκες τους για περαιτέρω εμβάθυνση και βελτίωση.

Στα παραδείγματα γίνονται νύξεις για επιλογές που μπορεί να κάνει ο δάσκαλος. Ποια θα είναι τελική επιλογή του υλικού, ποια η μορφή με την οποία θα δοθεί στους μαθητές (φύλλα εργασίας, κάρτες, φυλλάδιο, παρουσίαση στον πίνακα κ.α.), παως θα γίνει η εργασία στην τάξη και πως η κατ΄ οίκον εργασία είναι αποφάσεις που θα πάρει ο δάσκαλος.

Παραδειγμα 1 (Άσκηση Β6 § 2.7) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2,$$

με $\alpha < \beta < \gamma$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Με αριθμητικά δεδομένα Ι. Η άσκηση αυτή μπορεί να δοθεί σε κάποιους μαθητές με αριθμούς και *πρώτα* με χαμηλότερο βαθμό. Έτσι μπορεί πρώτα να δοθεί για επεξεργασία η

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

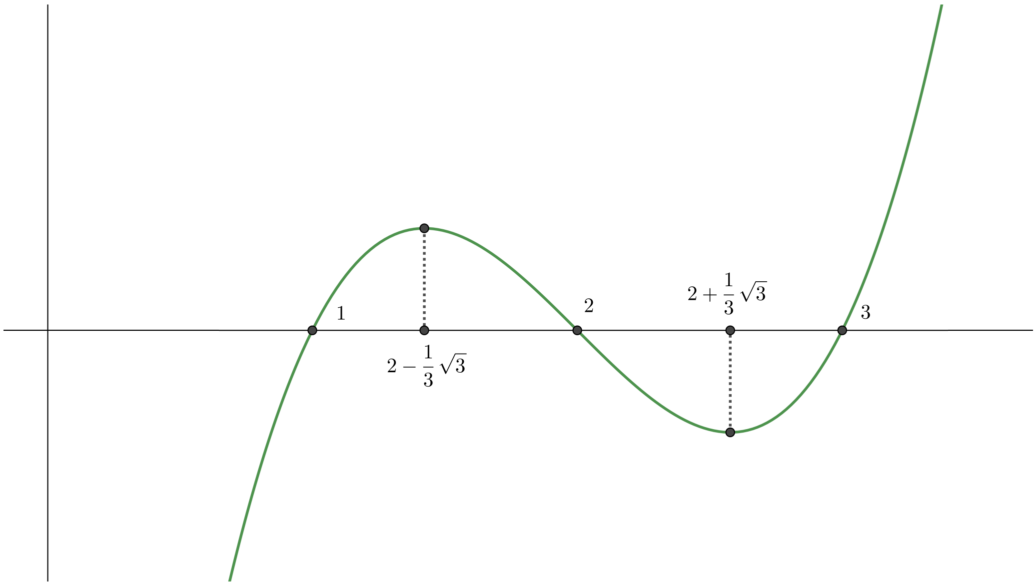
και να ζητηθούν τα ακρότατα της. Η h έχει παράγωγο

$$h'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

και διαστήματα μονοτονίας τα

$$\left(-\infty, 2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right], \left[2-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 2+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]. \left[2+\frac{1}{3}\sqrt{3}, +\infty\right)$$

και αντίστοιχα μονοτονία ↥, ↧, ↥. Επομένως έχει δύο τοπικά ακρότατα ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.



Με αριθμητικά δεδομένα ΙΙ. Στη συνέχεια μπορεί να δοθεί η προηγούμενη συνάρτηση αλλά με τους όρους υψωμένους στο τετράγωνο. Δηλαδή να δοθεί η

$$f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2 (x-3)^2 .$$

Για αυτή μετά την παραγώγιση και την παραγοντοποίηση βρίσκουμε ότι

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)\left(3x^2-12x+11\right)$$

Έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		1		$2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$		2		$2+\frac{1}{3}\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$+$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+11$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

από τον οποίο προκύπτει ότι η f έχει δύο τοπικά μέγιστα και τρία τοπικά ελάχιστα.

Η γενική μορφή υπολογιστικά. Το επόμενο επίπεδο προσέγγισης είναι η γενική περίπτωση όπου γίνονται οι παραγωγίσεις. Με

$$f(x) = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2$$

βρίσκουμε:

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha\right)$$

Ο παράγοντας

$$3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \ \ (*)$$

έχει διακρίνουσα

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha$$

η οποία είναι θετική όπως μπορεί να διαπιστωθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

1. Γράφοντας

   $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha\right)$$

   που γίνεται

   $$\frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right) > 0.$$

2. Θεωρώντας το ως τριώνυμο λ.χ. του γ που γίνεται

   $$\gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$$

   και έχει διακρίνουσα

   $$(\alpha+\beta)^2 - 4\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = -3(\alpha-\beta)^2 < 0.$$

Επομένως ο παράγοντας $(*)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ που πρέπει να συγκριθούν με τις α, β, γ. Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες και να γίνει απ΄ ευθείας σύγκριση. Πρόκειται για επίπονη διαδικασία.
2. Να ονομάσουμε

   $$\varphi(x) = 3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Είναι

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= (\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) > 0\\ \varphi(\beta) &= (\gamma-\beta)(\alpha-\beta) < 0\\ \varphi(\gamma) &= (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha) > 0\end{aligned}$$

Επομένως τα α, γ είναι εκτός των ριζών του τριωνύμου $\varphi(x)$ και το β μεταξύ. Άρα είναι

$$\alpha < \rho_1 < \beta < \rho_2 < \gamma$$

Τελικά έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	α		ρ_1		β		ρ_2		γ	$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$+$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\gamma$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0		0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

από τον οποίο προκύπτει η απάντηση στο ερώτημα.

Η γενική μορφή: Συλλογισμοί αντί υπολογισμών. Τέλος υπάρχει μια απάντηση με ελαχιστοποίση των πράξεων αλλά με υψηλό θεωρητικό φορτίο. Η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2$$

δεν παίρνει αρνητικές τιμές και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς α, β, γ που προφανώς αποτελούν θέσεις ελαχίστου. Η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ θα έχει, από το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής, μέγιστη τιμή η οποία δε μπορεί να είναι μηδέν αφού στο (α, β) δεν έχει ρίζα. Άρα η μέγιστη τιμή δεν θα εμφανίζεται στο α ή στο β αλλά σε ένα ή περισσότερα σημεία του (α, β). Από το θεώρημα του Fermat στο σημείο αυτά η παράγωγος της f θα μηδενίζεται. Παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να κάνουμε για το (β, γ). Άρα σε κάθε ένα από τα (α, β) και (β, γ) η f' θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Είναι

$$f(x) = g^2(x) \ \text{ όπου } \ g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

άρα

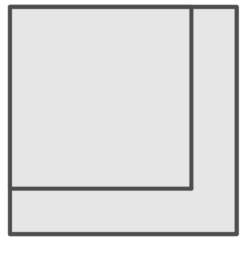
$$f'(x) = 2g(x)\, g'(x)$$

Η f είναι πολυώνυμο 6ου βαθμού οπότε η παράγωγος της θα είναι πολυώνυμο 5ου βαθμού. Επομένως η f' έχει το πολύ 5 ρίζες. Αλλά έχει οπωσδήποτε ρίζες τα α, β, γ και επίσης μία τουλάχιστον ρίζα μεταξύ α, β και β, γ. Άρα έχει τουλάχιστον 5 ρίζες. Συμπεραίνουμε ότι έχει ακριβώς 5 ρίζες εκ των οποίων δύο ανήκουν στα (α, β), (β, γ) και αντιστοιχούν σε θέσεις μεγίστου. Τελικά η f έχει 3 τοπικά ελάχιστα (που παρεμπιπτόντως είναι ολικά) και δύο τοπικά μέγιστα.

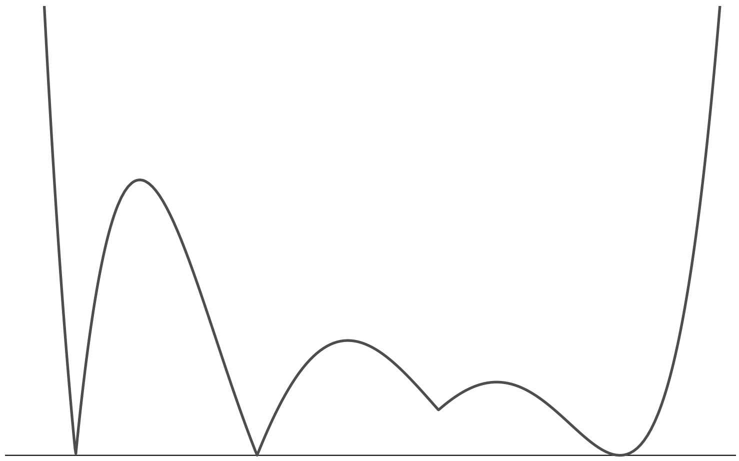
Και μια γεωμετρική προσέγγιση. Στην τελευταία πραγμάτευση είδαμε ότι $f(x) = g^2(x)$ όπου $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Τα ακρότατα της g είναι εύκολο να βρεθούν (ήδη έγινε στην αρχή στην αριθμητική περίπτωση). Επομένως έχουμε το πρόβλημα:

Αν ξέρουμε τα ακρότατα της $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της g^2;

Ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει όταν η g παίρνει μη αρνητικές τιμές. Για θετικούς αριθμούς τα τετράγωνα τους μεγιστοποιούνται αν και μόνο αν οι αριθμοί μεγιστοποιούνται. Δηλαδή $p < q \Leftrightarrow p^2 < q^2$ και αυτό διότι $q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$ και επομένως αφού $q + p > 0$ οι διαφορές $q^2 - p^2$ και $q - p$ έχουν το ίδιο πρόσημο.. Μία άλλη αιτιολόγηση είναι ότι απο δύο τετράγωνα μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνο με την μεγαλύτερη πλευρά:



Επομένως τα μέγιστα ή τα ελάχιστα μιας συνάρτησης *με μη αρνητικές τιμές* είναι και μέγιστα ή ελάχιστα του τετραγώνου της.



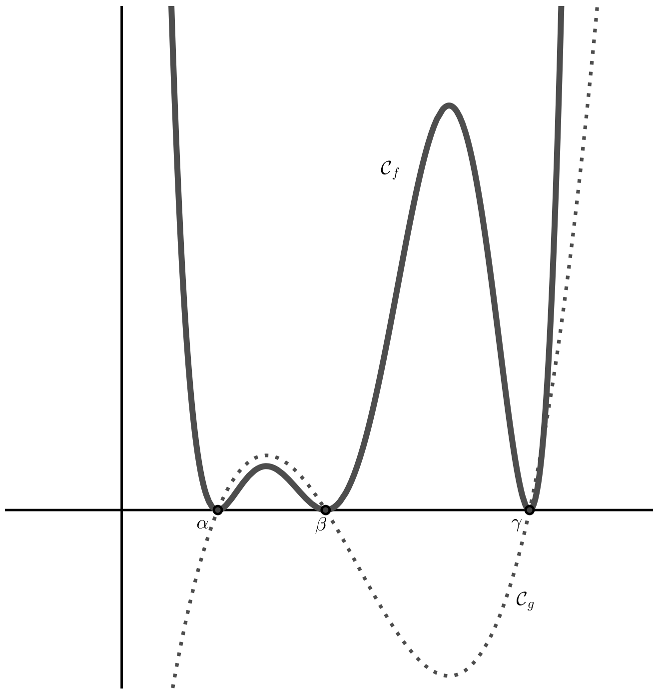
Τέλος για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: Οι θέσεις ακροτάτων της $g^2(x)$ είναι εκεί που παρουσιάζει ακρότατα η g συν τις ρίζες της. Ακριβέστερα:

- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με θετική τιμή παραμένουν ως έχουν.
- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με αρνητική τιμή αλλάζουν είδος.
- Θέσεις ριζών αντιστοιχούν σε ακρότατα (ελάχιστα)

Επιστρέφοντας στη συγκεκριμένη άσκηση βλέπουμε ότι η

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

έχει τρεις ρίζες ένα τοπικό ελάχιστο αρνητικό και ένα τοπικό μέγιστο θετικό. Το τετράγωνο της $f(x) = g^2(x)$ θα έχει τρία ελάχιστα (στις ρίζες) θα διατηρήσει το θετικό μέγιστο και θα αποκτήσει ένα ακόμη τοπικό μέγιστο που αντιστοιχεί στο τοπικό έλαχιστο της g.



Παραδειγμα 2 (Άσκηση Α3 i) § 1.1) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:
i) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$.

Εξοικείωση με τιμές. Μία εξοικείωση με την εκφώνηση μπορεί να γίνει μεταφράζοντας αριθμητικά το «βρίσκεται πάνω» και σύνθεση ενός πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-32	-11	-2	1	4	13	34
$g(x)$	-2	1	0	1	2	3	4

Η βοήθεια της Άλγεβρας $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$

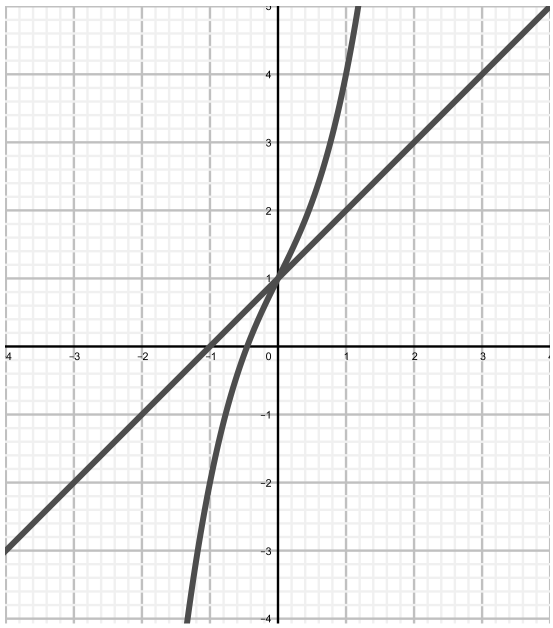
$$x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x\underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{+} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Εικονογράφηση με μία γραφική παράσταση. Ένα φύλλο με την γραφική παράσταση μπορεί να βοηθήσει περαιτέρω την κατανόηση του «φαινομένου».



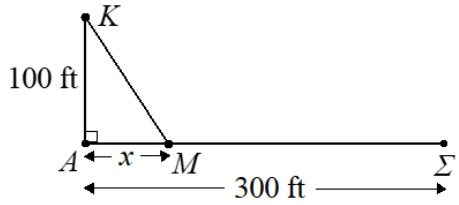
Παραλαγές. Κατά την επεξεργασία της άσκησης στην τάξη ενδέχεται κάποιοι μαθητές να μην έχουν καμία δυσκολία και να τελειώσουν την επίλυση γρήγορα. Μερικές πιο απαιτητικές παραλλαγές έχουν ενδιαφέρον:

1. Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τις συναρτήσεις $(f(x)-1)^2$ και $(g(x)-1)^2$.
   Απαντηση: $x \in \mathbb{R}^*$

2. Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τις συναρτήσεις $a^{f(x)}, a^{g(x)}$, $a > 0,\ a \neq 1$
   Απαντηση: $x > 0$ αν $a > 1$ και $x < 0$ αν $a < 1$.

Παραδειγμα 3 (Άσκηση Β13, § 2.7) Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα $100ft$ μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται $300ft$ μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα $3ft/s$ και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα $5ft/s$.
i) Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

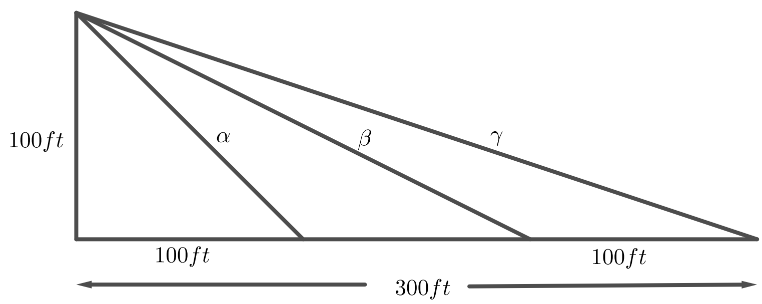
$$\mathrm{T}(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}.$$



ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του·

Προεργασία. Η συγκεκριμένη άσκηση έχει αρκετά προαπαιτούμενα που καλό είναι να συζητηθούν.

1. Ο τύπος της ταχύτητας στην ομαλή κίνηση και η επίλυση του ως προς τον χρόνο: $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$
2. Το θεώρημα του Πυθαγόρα. Ίσως είναι σκόπιμο κάποιοι μαθητές να κάνουν τους υπολογισμούς των τμημάτων α, β, γ:



3. Η κατανόηση του ρόλου των διαφορετικών ταχυτήτων. Μπορούν να γίνουν μερικές ποιοτικές παρατηρήσεις. Για παράδειγμα που θα βρεθεί το σημείο M όταν η ταχύτητα στην ακτή είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την ταχύτητα στην θάλασσα; Όταν είναι πολύ μικρή;
4. Η άσκηαη απαιτεί μεταξύ άλλων γνώση της παραγώγου ρίζας και σύνθετης συνάρτησης. Αποτελεί ευκαιρία για την υπενθύμιση τους.

Η κυρίως λύση. Είναι $T'(x) = \frac{1}{15}\frac{5x-3\sqrt{10\,000+x^2}}{\sqrt{10\,000+x^2}}$ και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$T'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x > 3\sqrt{10\,000 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$(5x)^2 > \left(3\sqrt{10\,000 + x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$25x^2 > 90\,000 + 9x^2 \Leftrightarrow$$

$$25x^2 - 9x^2 > 90\,000 \Leftrightarrow$$

$$16x^2 > 90\,000 \Leftrightarrow$$

$$x^2 > \frac{90\,000}{16} \Leftrightarrow$$

$$x^2 > 5625 \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x > \sqrt{5625} \Leftrightarrow$$

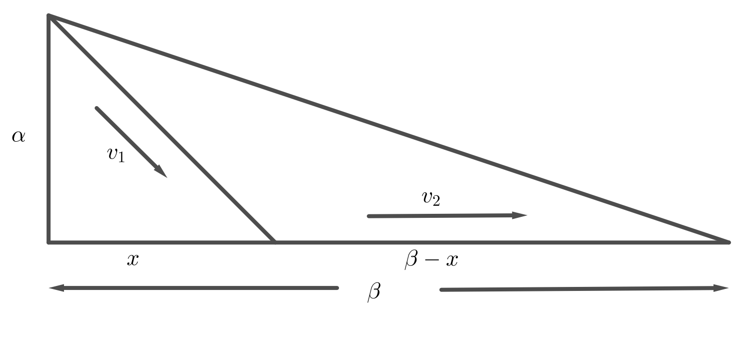
$$x > \sqrt{3^2 5^4} \Leftrightarrow$$

$$x > 3 \cdot 5^2$$

$$\Leftrightarrow x > 75$$

Επομένως η T είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 75)$ και γνησίως αύξουσα στο $(75, 300)$. Άρα ο ελάχιστος χρόνος επιτυγχάνεται όταν $x = 75$.

Η γενική περίπτωση. Είναι πιο δύσκολη αλλά και πιο ενδιαφέρουσα. Αν έχουμε την διάταξη:



Τότε ο συνολικός χρόνος είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\beta - x}{v_2}$$

και

$$T'(x) = \frac{v_2 x - v_1\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1 v_2\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Είναι $T'(x) > 0$ όταν

$$x > \frac{v_1 a}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}},$$

όπου βέβαια υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στην στεριά είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στην θάλασσα. Αν ονομάσουμε $m = \frac{v_2}{v_1}$ τον λόγο των δύο ταχυτήτων τότε βρίσκουμε ότι η θέση όπου ο χρόνος ελαχιστοποιείται είναι η

$$x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι δεν εξαρτάται από το β αλλά μόνο από το a και τον λόγο των δύο ταχυτήτων. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να προκαλέσει γόνιμη συζήτηση στην τάξη.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ανάλογο μαθηματικό και διδακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και το πρόβλημα της διάθλασης του φωτόσπου υπάρχει ως άσκηση στο βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» της Γ΄ Λυκείου (Άσκηση 10 των γενικών ασκήσεων του 1ου κεφαλαίου.[9]

Παραδειγμα 4 (Άσκηση Α6, § 3.5) i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Προετοιμασία. Για το πρώτο ερώτημα απαιτείται γνώση των κανόνων παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, λογαρίθμου, ρίζας και για το δεύτερο ερώτημα η σύνδεση παράγουσας και ορισμένου ολοκληρώματος και ιδιότητες λογαρίθμων. Για αρκετούς μαθητές μια υπενθύμιση βοηθάει.

Η κυρίως λύση. Δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες.

Επεκτάσεις Ι. Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι να βρεθεί όχι μόνο η παράγωγος της f αλλά και μία παράγουσα της. Δεδομένου ότι τα αόριστα ολοκληρώματα είναι εκτός ύλης το ερώτημα μπορεί να εστιαστεί στον υπολογισμό

[9]Βλ. και Morris Kline *Calculus. An Intuitive and Physical Approach* Wiley, 1977 § 8.5 σελ.

του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Το ερώτημα παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι εμπλέκει βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης. Έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\int_\alpha^\beta (x)'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta x\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' dx =$$

$$\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $x^2+1=u$ και κάνουμε τις αλλάγές: $xdx \to \frac{1}{2}du$, $\alpha \to \alpha^2+1$, $\beta \to \beta^2+1$. Βρίσκουμε:

$$\int_\alpha^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} = \sqrt{\beta^2+1}-\sqrt{\alpha^2+1}$$

και επομένως:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta\ln\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right) - \alpha\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right) - \sqrt{\beta^2+1} + \sqrt{\alpha^2+1}$$

Επεκτάσεις ΙΙ. Στην αρχική εκφώνηση η άσκηση του βιβλίου δεν ζητάει το πεδίο ορισμού της f αλλά μπορεί να συζητηθεί στην τάξη. Η τυπική[10] αντιμετώπιση είναι

$$x+\sqrt{x^2+1} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0$$

και επομένως η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να ήταν η εύρεση της αντίστροφης της f. Η ερώτηση στο σημείο αυτό της ύλης έχει σημασία διότι μπορούν οι μαθητές να επαναλάβουν προγενέστερες γνώσεις εμπλουτίζοντας με καινούργιες τεχνικές.

[10] Με τις σημαντικές ελλείψεις στην Άλγεβρα των τελειοφοίτων μαθητών μας η αντιμετώπιση αυτή δεν είναι αυτονόητη. Στις εξετάσεις του 2010 χρειάστηκε οι μαθητές να επιβεβαιώσουν ότι η συνάρτηση $x+\sqrt{x^2+9}$ παίρνει θετικές τιμές. Βρέθηκαν γραπτά μαθητών που ακολούθησαν την ακόλουθη τεκμηρίωση: Ξεκίνησαν με την εξίσωση $x+\sqrt{x^2+9}=0$ και απέδειξαν ότι είναι αδύνατη. Συμπέραναν ότι η συνεχής συνάρτηση $x+\sqrt{x^2+9}$ δεν έχει ρίζες άρα διατηρεί πρόσημο. Με δοκιμή βρήκαν ότι το πρόσημο είναι + και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι για όλα τα x είναι $x+\sqrt{x^2+9}>0$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$ αφού και οι δύο προσθετέοι έχουν όριο το $+\infty$. Επομένως και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$. Επίσης:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\underset{x<0}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{1^2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}^2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{u}\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$.

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Είναι

$$y=f(x)\Rightarrow y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\left(e^y-x\right)^2=\sqrt{x^2+1}^2\Rightarrow e^{2y}-2e^yx+x^2=x^2+1\Rightarrow$$

$$e^{2y}-2e^yx-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\frac{e^{2y}-1}{e^y}\Rightarrow x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

Επομένως η αντίστροφη της f έχει τύπο

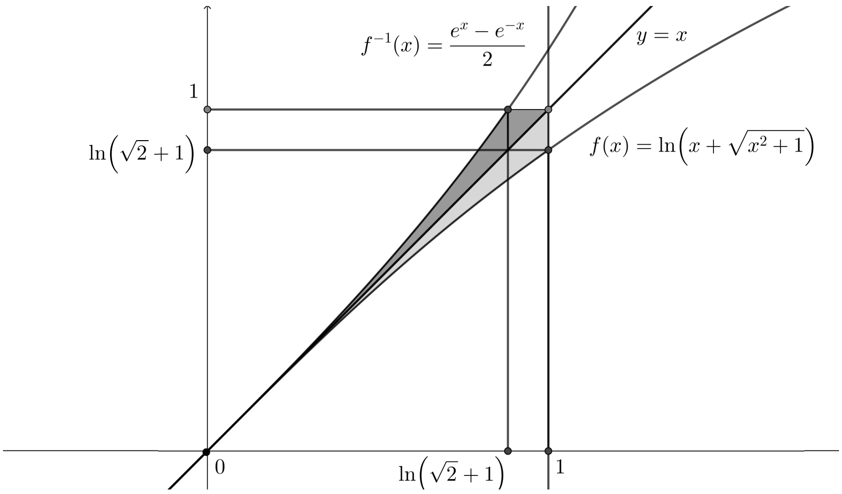
$$f^{-1}(y)=\frac{e^x-e^{--x}}{2}$$

Πρόκειται για το υπερβολικό ημίτονο.

Επεκτάσεις ΙΙΙ. Στις εξετάσεις του 2015 ζητήθηκε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $y=x$, $x=0$, $x=1$.

Επειδή $f''(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}$ η f στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι κοίλη. Η $y=x$ είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στην αρχή των αξόνων και επομένως η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$ στο $(0,+\infty)$, Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\int_0^1(x-f(x))\,dx$ που είναι ίσο με $\frac{1}{2}-\int_0^1 f(x)\,dx$. Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο υπολογισμού του $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ όπου α το 0 και όπου β το 1 βρίσκουμε τελικά ότι το εμβαδόν είναι $\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Έχοντας βρει την αντίστροφη συνάρτηση της f μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με συμμετρία:



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την $y=x$ και την $y=1$. Άρα το εμβαδό είναι:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x\right)dx+\int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{1}(1-x)\,dx=$$

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx-\int_0^1 xdx+\int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{1}1dx=$$

$$\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left(1-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}-\frac{1}{2}+1-\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Κάνοντας τους τελικούς υπολογισμούς βρίσκουμε πάλι την τιμή

$$\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Παραδειγμα 5 (Άσκηση Α8 § 1.4 του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής») Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y=2x-3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

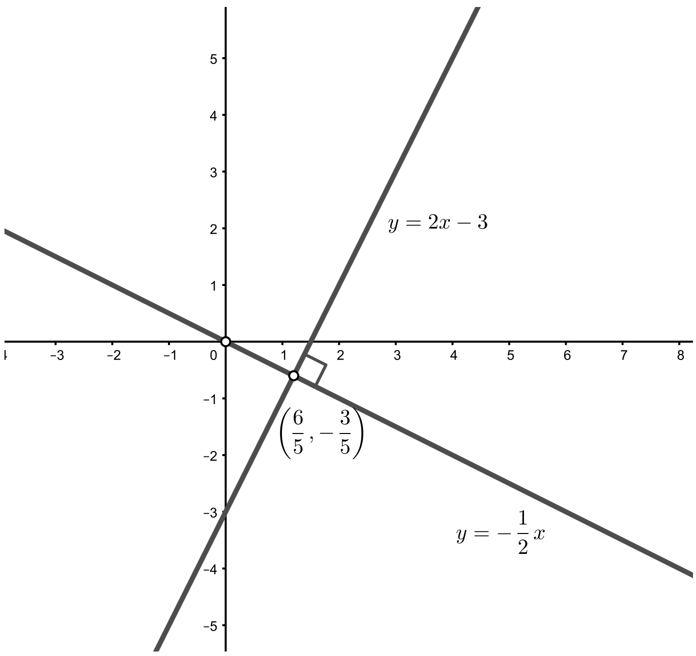
Η άσκηση αυτή αποτελεί μια πολύ καλή ευκαιρία μετάβασης από παλιότερες έννοιες (γεωμετρικές, αλγεβρικές) σε νεώτερες (αναλυτικές) και επίσης καλή ευκαιρία επανάληψης.[11]

[11] Ενδιαφέρον βιβλίο σχετικό με τα θέματα αυτού του παραδείγματος είναι το L. A. Lyusternik *The Shortest Lines. Variational Problems* Mir. Moscow 1983 (1976) της ωραίας σειρά Little Mathematic Library.

Χρήση Γεωμετρίας. Η ευθεία προφανώς δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από όλα τα σημεία της ευθείας πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων είναι το ίχνος της κάθετης που άγεται από την αρχή στην ευθεία. Η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως το 2 επομένως η κάθετη θα έχει το $-\frac{1}{2}$. Άρα η εξίσωση της κάθετης είναι $y-0=-\frac{1}{2}(x-0)$ δηλαδή $y=-\frac{1}{2}x$). Λύνοντας στο σύστημα:

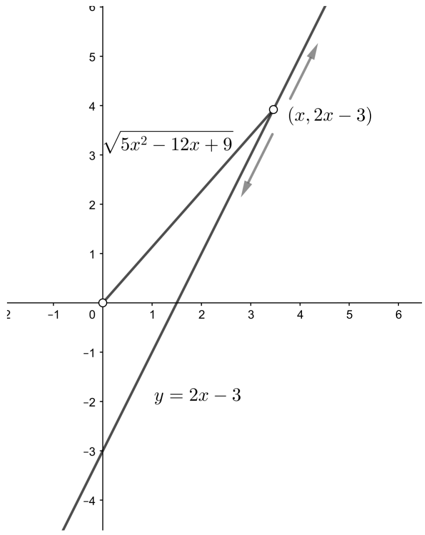
$$\left.\begin{array}{l} y = 2x-3 \\ y - -\frac{1}{2}x \end{array}\right\}$$

βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο των δύο ευθειών δηλαδή το ίχνος της κάθετης είναι το $\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$.



Αξίζει να σημειωθεί ότι η προηγούμενη λύση είναι «στατική» με την έννοια ότι εφαρμόζει ένα έτοιμο αποτέλεσμα, δουλεύει με «αγνώστους» και αποφεύγει την «δυναμική» χρήση της μεταβλητής.

Χρήση Άλγεβρας Το τυχόν σημείο της ευθείας είναι το $(q, 2q-3)$ η δε απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{(x-0)^2+(2x-3-0)^2}=\sqrt{5x^2-12x+9}$. Αυτή, προφανώς, γίνεται ελάχιστη όταν το $5x^2-12x+9$ γίνει ελάξιστο. Ξέρουμε ότι ένα τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha>0$ γίνεται ελάχιστο όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Εδώ $x=-\frac{-12}{2\cdot 5}=\frac{6}{5}$. Η τετμημένη του ζητούμενου σημείου είναι $2\cdot\frac{6}{5}-3=-\frac{3}{5}$.



Χρήση Ανάλυσης. Εργαζόμαστε όπως πριν και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $5x^2 - 12x + 9$ η οποία έχει παράγωγο $10x - 12$. Για $x > \frac{6}{5}$ η παράγωγος είναι θετική ενώ για $x < \frac{6}{5}$ είναι αρνητική. Άρα έχει ελάχιστο στο $\frac{6}{5}$. Η συνέχεια όπως στο προηγούμενο.

Η πρώτη επέκταση. Τι θα συνέβαινε αν αντί της ευθεία είχαμε μία άλλη καμπύλη και ζητούσαμε σημείο της καμπύλης που να απέχει από δοθέν ελάχιστη απόσταση;. Αυτό είναι ένα εύλογο ερώτημα για να δοκιμαστούν οι προηγούμενες προσεγγίσεις. Ως πρώτη προσέγγιση μπορεί να εξεταστεί το πρόβλημα:

> Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(0, 1)$ ελάχιστη απόσταση.

Εδώ δεν έχουμε ευθεία και δεν εφαρμόζεται η πρώτη προσέγγιση. Το τυχόν σημείο της καμπύλης είναι το (x, x^2) και η απόσταση του από το σημείο μας είναι

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

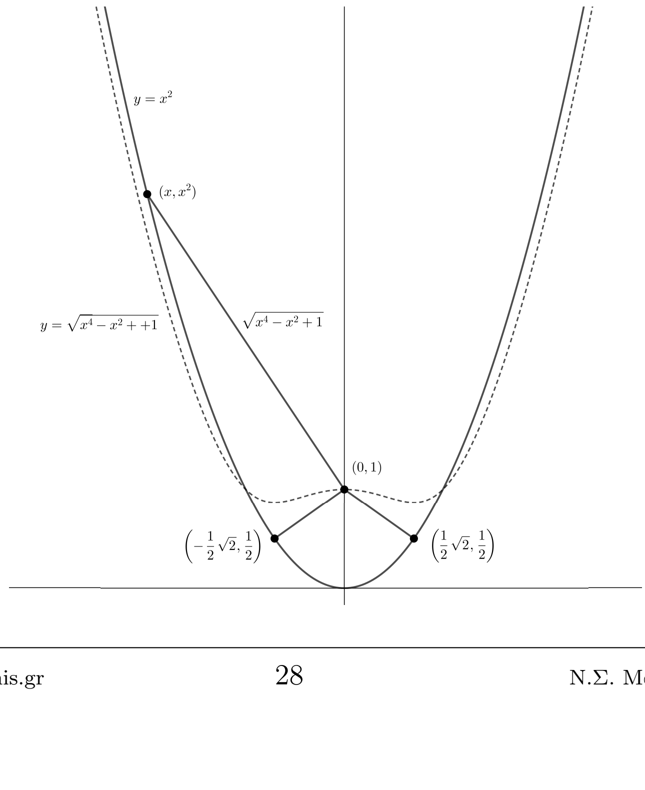
Επομένως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Η απάντηση μπορεί να δοθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

1. Εδώ συμβαίνει να μπορεί να εφαρμοσθεί η δεύτερη τεχνική, με το τριώνυμο, που είδαμε στην προηγούμενη άσκηση θέτοντας $x^2 = u$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $u^2 - u + +1$ που γίνεται ελάχιστη για $u = \frac{1}{2}$. Άρα η f ελαχιστοποιείται όταν $x^2 = \frac{1}{2}$ δηλαδή $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ή $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Συνεπώς τα αντίστοιχα σημεία είναι τα $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Η τεχνική με την παράγωγο εφαρμόζεται άμεσα: $f(x) = x^4 - x^2 + +1$ και $f'(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right)$. Έχουμε τον πίνακα:

x		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
$2x^2 - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	ο.ε.	↗	τ.μ.	↘	ο.ε.	↗

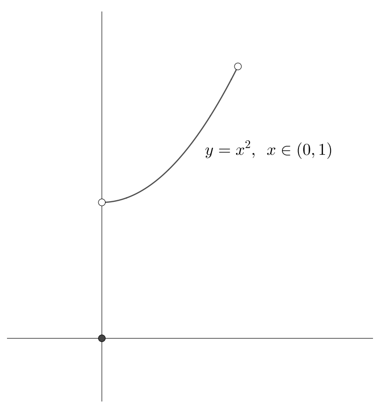
Επειδή ο τιμές της f στα $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ είναι ίσες και οι δύο αποτελεούν θέσεις ολικού ελαχίστου. Εδώ αξίζει να σχολιασθεί η θέση 0 που είναι θέση μόνον τοπικού μεγίστου και όχι ολικού αφού η απόσταση στα $\pm\infty$ έχει όριο $+\infty$ άρα δεν έχει μέγιστη τιμή. Στο σχήμα που ακολουθεί (μπορεί να δοθεί στην τάξη για συζήτηση) εμφανίζεται η κοινή γραφική παράσταση των x^2 και $\sqrt{(+x^4 - x^2 + 1)}$.



Δύο ακόμη επεκτάσεις. Μπορούν να δοθούν και οι επόμενες δύο ασκήσεις:

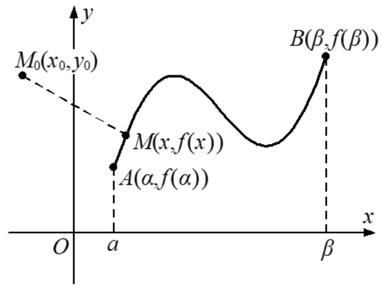
1. Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(1,2)$ ελάχιστη απόσταση.
   Απαντηση: Ζητάμε, τελικά, το ελάχιστο της $r(x) = x^4 - 3x^2 - 2x + 5$ που που επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
2. (Από διαγώνισμα που δόθηκε στο 3ο Λύκειο Ν. Σμύρνης το 2003 με βάση την άσκηση Α3 i), § 2.8) Να βρεθεί σημείο της γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$ που απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση.
   Απαντηση: $\left(\pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Οι προηγούμενες ασκήσεις έχουν ένα λίγο-πολύ αλγοριθμικό και υπολογιστικό χαρακτήρα. Υπήρχε μία συγκεκριμένη διαδικασία που αν ξεπερνούσε τα υπολογιστικά εμπόδια (τέτοια υπάρχουν πάντα) έδινε αποτέλεσμα. Η ύπαρξη σημείου ατην γραφική παράσταση μια συνάρτησης που απέχει ελάχιστη απόσταση από δοθέν σημείο δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη. Για παράδειγμα στη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ δεν υπάρχει σημείο της γραφικής της παράστασης που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σημείο όπου «έπρεπε» να εμφανίζεται η ελάχιστη, δηλαδή το σημείο $(0,1)$ απόσταση δεν υπάρχει στην γραφική παράσταση.



Το να έχει η καμπύλη της γραφικής παράστασης άκρα δηλαδή να είναι γραφική παράσταση (τουλάχιστον) συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα είναι ουσιώδης προϋπόθεση για να έχουμε μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση. Υπάρχει σχετική άσκηση του βιβλίου που καλύπτει το θέμα. Η έκταση της εκφώνησης της είναι δυσανάλογη από την δυσκολία της. Εν τούτοις είναι προτιμότερο να διδάσκεται *μετά* από μερικά υπολογιστικά θέματα του είδους.

(Άσκηση B9 §, 1.8) Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη $\mathcal{C}$ είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,
i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της $\mathcal{C}_f$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.
ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της $\mathcal{C}_f$ που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της $\mathcal{C}_f$ που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.



Στην άσκηση αυτή είναι ουσιώδες να αναδειχθεί η σημασία των υποθέσεων με κατάλληλα αντιπαραδείγματα. Για την σημασία του κλειστού διαστήματος έχεινε αναφορά πιο πάνω ενώ η σημασία της συνέχειας της f φαίνεται στην περίπτωση όπου το M_0 είναι το $(0,0)$ και

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 2, & x = 0 \end{cases} .$$

Η αρχική πραγμάτευση στην αναζήτηση του εγγύτατου , στην αρχή των αξόνων, σημείου της $y = 2x - 3$ ήταν με χρήση καθετότητας. Αν η ευθεία αντικατασταθεί με μια άλλη καμπύλη η έννοια αυτή παύει να υφίσταται. Όμως για αρκετά καλές καμπύλες που αντιστοιχούν σε παραγωγίσιμες συναρτήσεις μπορούμε να έχουμε ανάλογη έννοια που την υποβάλλει ο κύκλος:

Μια ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο M της γραφικής παράστασης μια παραγωγίσιμης συνάρτησης f ονομάζεται *κάθετη* στην $\mathcal{C}_f$ στο M *αν είναι κάθετη στην εφαπτομένη* της $\mathcal{C}_f$ στο M. Μπορεί τώρα να δοθεί η επόμενη άσκηση επέκταση της προηγούμενης:

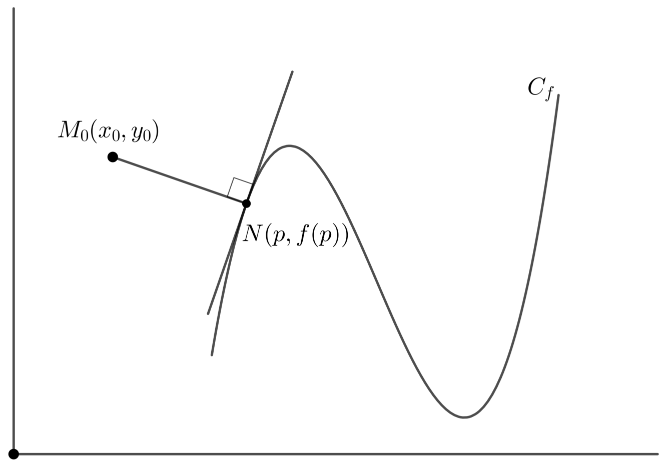
Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι αν για κάποιο σημείο $N(p, f(p))$ της $\mathcal{C}_f$ η απόσταση M_0N γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη και το p είναι εσωτερικό σημείο του Δ τότε η ευθεία M_0N είναι κάθετη στην $\mathcal{C}_f$ στο N.

Αποδειξη. Η απόσταση του τυχόντος σημείου $(x, f(x)$ της $\mathcal{C}_f$ από το M_0 είναι

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

και

$$d'(x) = \frac{(x - x_0) + f'(x)(f(x) - y_0)}{d(x)}$$

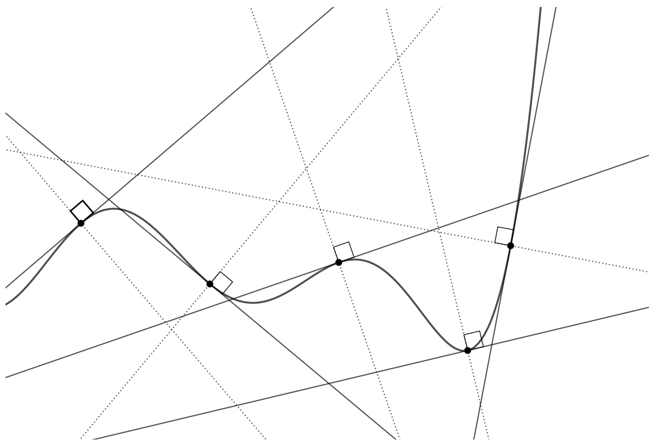


Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$. Άρα

$$(p - x_0) + f'(p)(f(p) - y_0) = 0 \quad (\diamond).$$

Είναι $\overrightarrow{M_0N} = (p - x_0, f(p) - y_0)$ και το διάνυσμα $\vec{u} = (1, f'(p))$ είναι παράλληλο στην εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο N διότι έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως. Η $(\diamond)$ μας πληροφορεί ότι το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων είναι μηδέν και επομένως είναι κάθετα. Άρα η M_0N είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Κάθετες και εφαπτομένες. Στα προηγούμενα δόθηκε η δυνατότητα να συζητηθεί η έννοια της κάθετης που οι μάθητες γνώρισαν για πρώτη φορά στην ευθεία και της εφαπτομένης, έννοιας που πρωτογνώρισαν στον κύκλο. Οι δύο αυτές έννοιες είδαμε ότι συνδέονται με την μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση αποστάσεων σημείου από καμπύλη. Οι καμπύλες-γραφικές παραστάσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων διαθέτουν εφαπτομένη και κάθετη σε κάθε σημείο τους.



Στο σημείο αυτό μπορούν να δοθούν δύο ενδιαφέρουσες αλλά κάπως απαιτητικές ασκήσεις.

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν όλες οι εφαπτομένες της $\mathcal{C}_f$ διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι ευθεία.
2. Έστω $f : [\alpha, \beta,] \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν όλες οι κάθετες της $\mathcal{C}_f$ διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι τόξο κύκλου.

Αποδείξεις.

1. Έστω (p, q) το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 είναι η
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
Επειδή διέρχεται από το (p, q), για κάθε x_0 θα ισχύει:
$$q - f(x_0) = f'(x_0)(p - x_0).$$
Επομένως για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:
$$q - f(x) = f'(x)(p - x).$$
ή ισοδύναμα
$$f'(x)(p - x) + f(x) = q \quad .(\heartsuit)$$

(α′) Εργαζόμαστε με τα $x \in (p, +\infty)$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ($\heartsuit$) με $p - x$ και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{1}{p-x} f(x) = \frac{q}{p-x}$$

Είναι $\frac{1}{p-x} = (-\ln(x-p))'$. Πολλαπλασιάζουμε[12] και τα δύο μέλη με $e^{-\ln(x-p)}$ και έχουμε:

$$f'(x)e^{-\ln(x-p)} + \frac{1}{p-x} e^{-\ln(x-p)} f(x) = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

ή αλλιώς

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

από την οποία προκύπτει διαδοχικά:

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = \left(\frac{q}{x-p}\right)'$$

$$\frac{f(x)}{x-p} = \frac{q}{x-p} + k$$

$$f(x) = k(x-p) + q \quad x > p.$$

(β′) Εργαζόμαστε με τα $x \in (-\infty, p)$ και με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$f(x) = m(x-p) + q \quad x > p$$

Από την ($\heartsuit$) θέτοντας $x = p$ βρίκουμε ότι $f(p) = q$. Τέλος αφού η f είναι παραγωγίσιμη ιδιαιτέρως για την παράγωγο στο p θα ισχύει:

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x-p}.$$

δηλαδή:

$$\lim_{x \to p^-} \frac{m(x-p) + q - q}{x-p} = \lim_{x \to p^+} \frac{k(x-p) + q - q}{x-p}$$

από την οποία βρίσκουμε $m = k$.

[12] Ακολουθείται η τυπική διαδικασία επίλυσης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης α′ τάξης που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι της μορφής

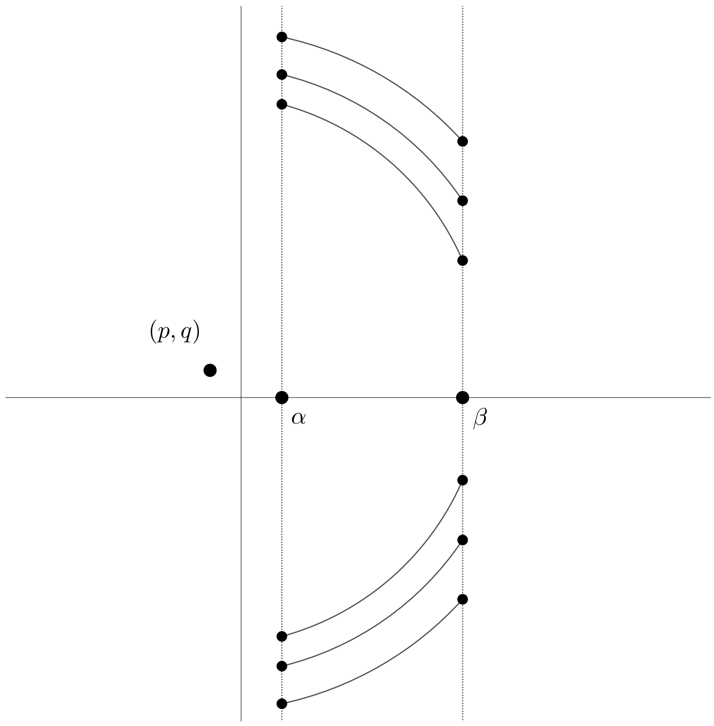
$$f(x) = k(x - p) + q.$$

Προφανώς και κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής είναι λύση του προβλήματος αφού η γραφική παράσταση της είναι ευθεία που διέρχεται από το (p, q) και η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της είναι ο εαυτός της.

Επομένως λύσεις του προβλήματος είναι οι γραμμικές συναρτήσεις $y = \alpha x + \beta$ που διέρχονται από το (p, q).

2. Η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο τυχόν σημείο της με τετμημένη x_0 θα έχει εξίσωση:
$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$
Η τυχούσα κάθετη ευθεία σε αυτήν θα έχει εξίσωση $x + f\prime(x_0)y + L = 0$ και για να διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ θα πρέπει να είναι $L = -x_0 - f\prime(x_0)f(x_0)$. Επομένως η κάθετη στην $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με τετμημένη x_0 θα έχει εξίσωση:
$$x + f'(x_0)y - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0$$
Αφού θα διέρχεται από το (p, q) για όλα τα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ θα είναι:
$$p + f'(x_0)q - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0.$$
Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι
$$f'(x)(f(x) - q) + (x - p) = 0,$$
δηλαδή
$$\left(\frac{(x-p)^2}{2} + \frac{((f(x) - q))^2}{2}\right)' = 0$$
Άρα:
$$\frac{(x-p)^2}{2} + \frac{((f(x) - q))^2}{2} = c$$
ή αλλιώς:
$$(x-p)^2 + (f(x) - q)^2 = \left(c\sqrt{2}\right)^2.$$
Θέτοντας $r = \sqrt{2c}$ βρίσκουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται στον κύκλο με εξίσωση
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$
και επειδή είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι τόξο του.

Τα τόξα του σχήματος είναι μερικές λύσεις του προβλήματος:


(p, q)
α
β

Παραδειγμα 6 (Η Θεωρία της υποπαραγράφου της 1.3 «Συνάρτηση 1 − 1»

Συνάρτηση 1–1

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \neq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή:

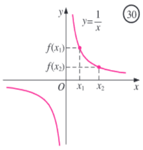
"Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$",

που σημαίνει ότι:

"Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες".

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ λέγεται συνάρτηση 1–1 (ένα προς ένα). Γενικά:

30



ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

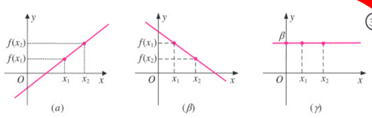
Εδώ μπορεί
να δοθεί απόδειξη

Έτσι για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι συνάρτηση 1–1. (Σχ. 31α, β)

Αριθμητικές ασκήσεις
για τις 1-1 συναρτήσεις.

31



αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x_1+\beta=\alpha x_2+\beta$$

$$\alpha x_1=\alpha x_2$$

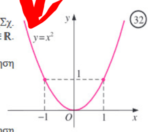
$$x_1=x_2.$$

Χρειάζονται περισσότερα
παραδείγματα συναρτήσεων
που είναι ή δεν είναι 1-1.

— Η συνάρτηση $f(x)=\beta$ δεν είναι συνάρτηση 1–1 (Σχ. 31γ), αφού $f(x_1)=f(x_2)=\beta$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ (Σχ. 32) δεν είναι συνάρτηση 1–1, αφού $f(-1)=f(1)=1$ αν και είναι $-1 \neq 1$.

32



ΣΧΟΛΙΑ

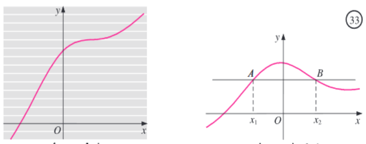
- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν:

— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1–1".

33

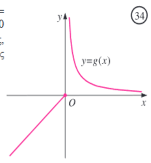


συνάρτηση 1–1 **συνάρτηση όχι 1–1**

Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha \neq 0$, $f_2(x)=\alpha x^3$, $\alpha \neq 0$, $f_3(x)=\alpha^x$, $0<\alpha \neq 1$ και $f_4(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha \neq 1$, είναι συναρτήσεις 1–1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} x & , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases} \quad (\Sigma\chi.\ 34).$$

34



Επιστροφή:

Αν μια συνεχής συνάρτηση
είναι ορισμένη σε διάστημα
και είναι 1-1 τότε είναι
γνησίως μονότονη.

Αν μία συνάρτηση είναι
παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα
και η παράγωγος δεν
μηδενίζεται τότε
είναι 1-1.

Αν μια συνάρτηση είναι
παραγωγίσιμη σε ένα
διάστημα και η παράγωγος
δεν μηδενίζεται τότε είναι
γνησίως μονότονη.

Στην προηγούμενη σελίδα αριστερά απεικονίζεται εκείνο το μέρος του σχολικού βιβλίου που αναφέρεται στις 1-1 συναρτήσεις. Για σημαντικό μέρος των μαθητών το κείμενο αυτό είναι αδιαπέραστο. Προσπαθούν υπογραμμίζοντας να το κάνουν κατανοήσιμο αλλά δεν τα καταφέρνουν. Είναι ουσιώδες ο δάσκαλος να προβληματιστεί με το κείμενο (και κάθε κείμενο του σχολικού βιβλίου) βάζοντας τον εαυτό του στη θέση του μαθητή. Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

- Λείπουν κάποιες εξηγήσεις;
- Υπάρχουν σημεία που χρειάζονται συμπληρώσεις;
- Πως μπορεί το κείμενο να γίνει προσπελάσιμο;
- Χρειαζεται στο μέλλον, όταν η διδασκαλία διανύει άλλα μέρη της ύλης, να γίνει επιστροφή;

Ερωτήματα αυτού του τύπου που αφορούν μια ενότητα δεν είναι τα ίδια για όλους τους δασκάλους και κοινά ερωτήματα δεν δέχονται τις ίδιες απαντήσεις.

Κατά την γνώμη μου η έννοια της 1-1 συνάρτησης αν και σημαντική στα Μαθηματικά δεν είναι σημαντική στην Ανάλυση του Λυκείου. Ο λόγος: Οι συναρτήσεις που μελετώνται είναι κατά διαστήματα μονότονες, αποφεύγονται οι «παθολογικές» περιπτώσεις συναρτήσεων οπότε η μονοτονία είναι αρκετή. Ωστόσο η έννοια υπάρχει στο βιβλίο και την εξεταστέα ύλη οπότε πρέπει να διδαχθεί όσο γίνεται καλλίτερα. Μερικές παρεμβάσεις που μπορούν να γίνουν είναι οι ακόλουθες:

1. Να προστεθούν απλά παραδείγματα όπου η ιδιότητα του 1-1 να εξετάζεται αλγεβρικά:

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

(α′) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)+1$.

(β′) $f(x) = \begin{cases} -x & |x| < 1 \\ x & |x| \geq 1 \end{cases}$

(γ′) $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \alpha \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

2. Να δοθεί η απόδειξη του κριτηρίου για τις 1-1 που είναι αναπόδεικτο. Η απόδειξη είναι συντομότατη και προφέρει στην κατανόηση. Να γίνει σύγκριση ορισμού και κριτηρίου στις περιπτώσεις:

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

(α′) $f(x) = -2x - 1$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

(β′) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $\mathcal{D}_f = [1, +\infty)$

3. Περαιτέρω κατανόηση της ενότητας μπορεί να επιτευχθεί με επιστροφή σε τρεις χρονικές στιγμές:

Μετά την διδασκαλία της συνέχειας σε διάστημα. Μπορεί να δοθεί η ακόλουθη άσκηση:[13]

Έστω μια συνεχής 1-1 και συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

(α′) Έστω α και β δύο διάφοροι αριθμοί του Δ και p αριθμός μεταξύ των α, β. Να αποδείξετε ότι το $f(p)$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

(β′) Έστω $[\alpha, \beta]$ ένα κλειστό υποδιάστημα του Δ. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$.

(γ′) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Απόδειξη.

(α′) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha < \beta$. Τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ θα είναι διάφορα. Θα εργαστούμε στην περίπτωση όπου $f(\alpha) < f(\beta)$ (η περίπτωση $f(\alpha) > f(\beta)$ αντιμετωπίζεται όμοια). Είναι $\alpha < p < \beta$ και θέλουμε να είναι $f(\alpha) < f(p) < f(\beta)$. Επειδή το $f(p)$ δε μπορεί να είναι ίσο με κάποιο από τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ αρκεί να αποκλείουμε τις περιπτώσεις

- $f(p) < f(\alpha) < f(\beta)$.
- $f(\alpha) < f(\beta) f(p)$.

Έστω ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση. Επιλέγουμε ένα αριθμό y με $f(p) < y < f(\alpha)$. Ο y βρίσκεται μεταξύ των $f(p)$ και $f(\alpha)$ της συνεχούς συνάρτησης f. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για το διάστημα $[\alpha, p]$ θα υπάρχει κ με $\alpha < \kappa < p$ ώστε $f(\kappa) = y$. Αλλά είναι και $f(p) < y < f(\beta)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την f στο διάστημα $[p, \beta]$ έχουμε ότι υπάρχει λ με

[13] Η ανάλυση σε ερωτήματα είναι σκόπιμη. Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις.
α) Βλ. Σ. Νεγρεποντης. Σ. Γιωτοπουλος, Ε. Γιαννακουλιας *Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι* Συμμετρία, 1987 σελ.178-179
β) Μία πολύ ενδιαφέρουσα προσέγγιση είχε γράψει στο mathematica ο Σιλουανός Μπραζιτίκος: `https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=223054#p223054`

$p < \lambda < \beta$ ώστε $f(\lambda) = y$. Τα κ, λ είναι διάφορα αλλά τα $f(\kappa)$, $f(\lambda)$ είναι ίσα (με y) και έχουμε άτοπο. Άρα η πρώτη περίπτωση αποκλείεται.
Ο αποκλεισμός της δεύτερης περίπτωσης γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

(β′) Αφού η f είναι 1-1 τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι άνισα. Θα δείξουμε ότι αν $f(\alpha) < f(\beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ ενώ αν είναι $f(\alpha) > f(\beta)$ η f θα είναι γνησίως φθίνουσα. Εργαζόμαστε στην πρώτη περίπτωση. Η δεύτερη γίνεται όμοια.
Θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το $[\alpha, \beta]$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Οι δυνατές περιπτώσεις των θέσεων των x_1, q_2 στο $[\alpha, \beta]$ είναι:

- $\alpha = x_1 < \ x_2 = \beta$
- $\alpha = x_1 < \ x_2 < \beta$
- $\alpha < x_1 < \ x_2 < \beta$
- $\alpha < x_1 < \ x_2 = \beta$

Από την πρώτη περίπτωση το αποδεικτέο είναι άμεσο.
Στην δεύτερη από το ερώτημα (α′) συνάγουμε ότι το $f(x_2)$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$, (β) δηλαδή $f(\alpha) < f(x_2) < f(\beta)$ και πάλι από το ερώτημα (α′) ότι το $f(x_1)$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(x_2)$ δηλαδή $f(\alpha) < f(x_1) < f(x_2)$ και έχουμε το αποδεικτεο.
Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται όμοια με την προηγούμενη.

(γ′) Έχουμε δείξει ότι η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ. Ας υποθέσουμε ότι το $[\alpha, \beta]$ περιέχεται στο Δ και $f(\alpha) < f(\beta)$. Θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1 < \ x_2$ από το Δ και θα δείξουμε ότι και $f(x_1) < f(x_2)$. Έστω m ο πιο μικρός από τους x_1, α (αν είναι ίσοι θεωρούμε τον x_1) και M ο πιο μεγάλος από τους x_2, β (πάλι αν είναι ίσοι θεωρούμε τον x_2). Στο διάστημα m, M η f είναι γνησίως μονότονη και έχει την ίδια μονοτονία σε κάθε υποδιάστημα του. Στο υποδιάστημα του $[\alpha, \beta]$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και στο m, M ρίναι γνησίως αύξουσα άρα το ίδιο θα ισχύει και στο υποδιάστημα $[x_1, \ x_2]$. Ιδιαιτέρως $f(x_1) < f(x_2)$.

Μετά την διδασκαλία του θεωρήματος μέσης τιμής. Μπορεί να δοθεί σαν άσκηση η ακόλουθη:

> Να αποδειχθεί ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και η παράγωγος της δεν μηδενίζεται τότε είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $x_1 \neq x_2$ από το Δ. Έφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2 και έχουμε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x_1, x_2. Στην παραπάνω σχέση το δεύτερο μέλος είναι διάφορο του μηδενός άρα και το πρώτο και επομένως και η διαφορά $f(x_2) - f(x_1)$. Άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$ και η F είναι 1-1.

Μετά την διδασκαλία του θεωρήματος του Fermat. Μπορεί να δοθεί σαν άσκηση η ακόλουθη:

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο ένα διάστημα Δ.

(α′) Έστω $[\alpha, \beta]$ ένα κλειστό υποδιάστημα του Δ. Να αποδειχθεί ότι:
- Αν $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) < 0$ υπάρχουν p, q στο (α, β) ώστε $f(\alpha) < f(p)$ και $f(\beta) < f(q)$.
- Αν $f'(\alpha) < 0$ και $f'(\beta) > 0$ υπάρχουν p, q στο (α, β) ώστε $f(\alpha) > f(p)$ και $f(\beta) > f(q)$.

(β′) (Ασθενής μορφή Θ. Darboux) Να αποδειχθεί ότι αν η f' παίρνει ετερόσημες τιμές στα α, β τότε μεταξύ των α, β υπάρχει ρίζα της f'.

(γ′) Να αποδειχθεί ότι αν η f' δεν έχει ρίζα στο Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη.

(α′) Αποδεικνύουμε το πρώτο. Όμοια αποδεικνύεται το δεύτερο. Ισχύει:

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) > 0$$

επομένως υπάρχει p, στο (α, β) ώστε $\frac{f(p) - f(\alpha)}{p - \alpha} > 0$ και αφού $p - \alpha > 0$ είναι $f(p) - f(\alpha) > 0$ και $f(p) > f(\alpha)$. Όμοια διαπιστώνεται ότι υπάρχει q στο (α, β) ώστε $f(\beta) < f(q)$.

(β′) Ας υποθέσουμε ότι Αν $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) < 0$ (η περίπτωση όπου τα πρόσημα είναι αντίθετα είναι παρόμοια). Τότε από το ερώτημα (ά) θα υπάρχουν p, q στο (α, β) με:

$$f(\alpha) < f(p) \quad \text{και} \quad f(\beta) < f(q).$$

Στο $[\alpha, \beta]$ η παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, f έχει μέγιστη τιμή η οποία λόγω των παραπάνω ανισοτήτων δε μπορεί να είναι το $f(\alpha)$ ή το $f(\beta)$. Επομένως η μέγιστή τιμή της fθα είναι κάποιο $f(x_0)$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$. Άρα μεταξύ των α, β υπάρχει ρίζα της f'.

(γ′) Η παράγωγος από το ερώτημα (β′) δε μπορεί να πάρει ετερόσημε τιμές γιατί σε μια ΄τετοια περίπτωση θα είχε ρίζα. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και η f είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.