Διαφοροποιημένη Διδασκαλία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου

Ν.Σ. Μαυρογιάννης, (MSc, PhD), Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Παραδοχές.

ΠΑΡΑΔΟΧΗ. Οι μαθητές μας αντιλαμβάνονται και προσεγγίζουν τα Μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους.

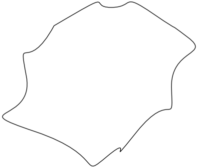
Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Παραδοχές.

ΠΑΡΑΔΟΧΗ. Οι μαθητές μας αντιλαμβάνονται και προσεγγίζουν τα Μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους.
ΣΥΝΕΠΕΙΑ. Η διδασκαλία οφείλει να προσαρμόζεται στο μαθητικό κοινό που απευθύνεται.

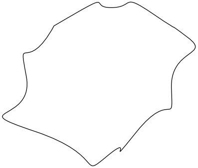
Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Διαφοροποίηση ανά τμήμα.

Όταν έχουμε διαφορετικά τμήματα:

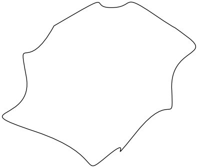
ΤΜΗΜΑ 1



ΤΜΗΜΑ 2



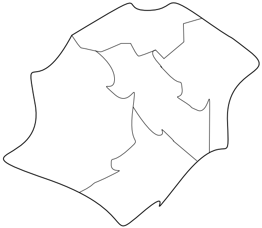
ΤΜΗΜΑ 3



Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Διαφοροποίηση μέσα στο τμήμα.

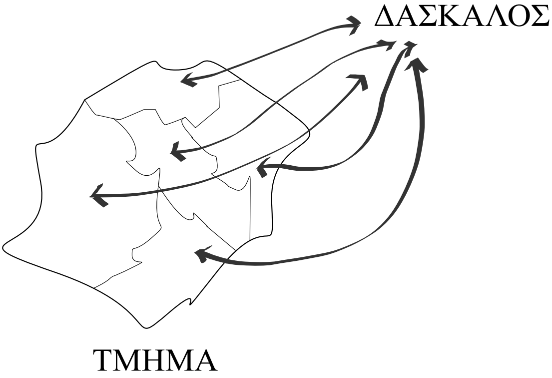
Ή στο ίδιο τμήμα όταν έχουμε μαθητές με διαφορετικές δυνατότητες και ενδιαφέροντα.

TMHMA 1



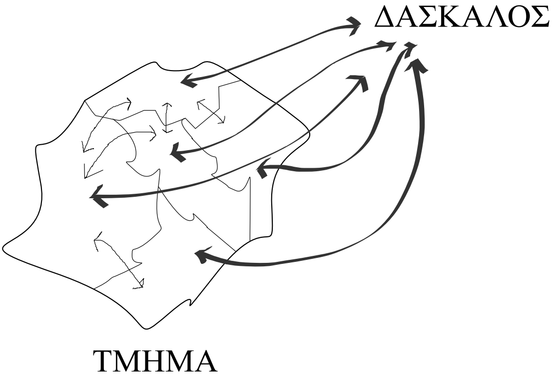
Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας. Αλληλεπιδράσεις I

Η επιλογή της διαφοροποίησης της διδασκαλίας σε ένα τμήμα μπορούμε να έχουμε αλληλόδραση μεταξύ των ομάδων και του δασκάλου:



Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Αλληλεπιδράσεις ΙΙ

ή και, ένας πιο τολμηρός τρόπος, αλληλόδραση και μεταξύ των ομάδων:



Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Από που ξεκινάμε.

Carol Ann Tomlinson

«Στις αίθουσες διδασκαλίας στις οποίες γίνεται διαφοροποίηση της εργασίας οι εκπαιδευτικοί αρχίζουν από το σημείο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές και όχι από την πρώτη σελίδα του σχολικού εγχειριδίου. Αποδέχονται και χτίζουν πάνω στην αρχή ότι οι μαθητές διαφέρουν μεταξύ τους σε μεγάλο βαθμό και σε διαφορετικά θέματα.»

Η διαφοροποίηση δεν είναι άγνωστη στους εκπαιδευτικούς.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν *μεμονωμένες* τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας

Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Η διαφοροποίηση δεν είναι άγνωστη στους εκπαιδευτικούς.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν *μεμονωμένες* τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας

- Επανάληψη ενός μέρους του μαθήματος με «άλλα λόγια».

Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Η διαφοροποίηση δεν είναι άγνωστη στους εκπαιδευτικούς.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν *μεμονωμένες* τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας

- Επανάληψη ενός μέρους του μαθήματος με «άλλα λόγια».
- Αλλαγή των δεδομένων σε μια άσκηση.

Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Η διαφοροποίηση δεν είναι άγνωστη στους εκπαιδευτικούς.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν *μεμονωμένες* τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας

- Επανάληψη ενός μέρους του μαθήματος με «άλλα λόγια».
- Αλλαγή των δεδομένων σε μια άσκηση.
- Ενασχόληση με την σκέψη μεμονωμένων μαθητών.

Γενικά για την διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Η διαφοροποίηση δεν είναι άγνωστη στους εκπαιδευτικούς.

Οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν *μεμονωμένες* τεχνικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας

- Επανάληψη ενός μέρους του μαθήματος με «άλλα λόγια».
- Αλλαγή των δεδομένων σε μια άσκηση.
- Ενασχόληση με την σκέψη μεμονωμένων μαθητών.
- Εκτός προγράμματος, επιστράτευση σχημάτων η παραδειγμάτων.

κ.α.

Σκαλωσιές :
Τι είναι.

Σχετική με την διαφοροποίηση είναι η πρακτική της **σκαλωσιάς**. Πρόκειται για την σύνθεση διδακτικών «υποστηριγμάτων» ποικίλης μορφής που αποσκοπούν στο να υποβοηθήσουν τους μαθητές να πετύχουν κάποιους μαθησιακούς στόχους (κατανόηση θεωρίας, εκμάθηση κάποιας διαδικασίας, επίλυσης μια άσκησης κ.α.).

Σκαλωσιές: Κλασικό Παράδειγμα

George Pólya (1887-1985)

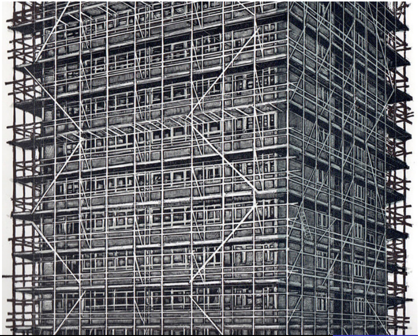
«Αν δεν μπορείτε να λύσετε το προτεινόμενο πρόβλημα προσπαθείστε να λύσετε πρώτα κάποιο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να φανταστείτε κάποιο πιο προσιτό σχετικό πρόβλημα;»

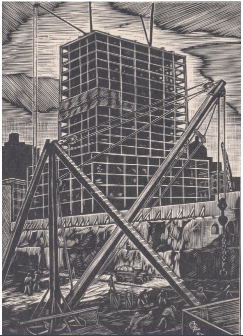
«Πως να το λύσω;»

Σκαλωσιές:
Εφαρμόζονται ανεξάρτητα από την επιστημολογική βάση της διδασκαλίας.

Η πρακτική της σκαλωσιάς εφαρμόζεται

- Τόσο στην περίπτωση που επιστημολογική βάση της διδασκαλίας είναι ότι η μαθηματική γνώση προϋπάρχει και προσεγγίζεται
- όσο και στην περίπτωση που επιστημολογική αφετηρία είναι ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται.





Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Δυσκολίες.

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του λυκείου, ως είναι φυσικό, προσκρούει σε πολλές, πρόσθετες, δυσκολίες:

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Δυσκολίες.

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του λυκείου, ως είναι φυσικό, προσκρούει σε πολλές, πρόσθετες, δυσκολίες:

1. Στις παγιωμένες αντιλήψεις των προηγουμένων χρόνων για το «πως γίνεται το μάθημα».

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Δυσκολίες.

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του λυκείου, ως είναι φυσικό, προσκρούει σε πολλές, πρόσθετες, δυσκολίες:

1. Στις παγιωμένες αντιλήψεις των προηγουμένων χρόνων για το «πως γίνεται το μάθημα».
2. Στην ανάγκη να καλυφθεί μία συγκεκριμένη ύλη σε μία σχετικά μικρή ωφέλιμη χρονική περίοδο.

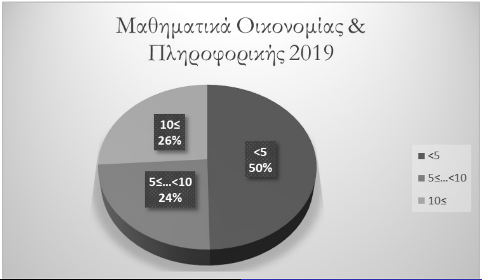
Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Δυσκολίες.

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του λυκείου, ως είναι φυσικό, προσκρούει σε πολλές, πρόσθετες, δυσκολίες:

1. Στις παγιωμένες αντιλήψεις των προηγουμένων χρόνων για το «πως γίνεται το μάθημα».
2. Στην ανάγκη να καλυφθεί μία συγκεκριμένη ύλη σε μία σχετικά μικρή ωφέλιμη χρονική περίοδο.
3. Στην ανάγκη να εξασφαλισθεί η «επιχειρησιακή» αποτελεσματικότητα στις επερχόμενες εξετάσεις.

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Αξίζει τον κόπο;

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Αξίζει τον κόπο;



Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Πως; Θεωρία.

Πλαισίωση της θεωρίας.

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Πως; Θεωρία.

Πλαισίωση της θεωρίας.

1. Κάθε παρουσίαση της νέας θεωρίας στηρίζεται σε προγενέστερες έννοιες. Μια σύντομη ad hoc υπενθύμιση τους ίσως με κάποια παραδείγματα ενδέχεται να βοηθήσει κάποιους μαθητές να προχωρήσουν ευχερέστερα.

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Πως; Θεωρία.

Πλαισίωση της θεωρίας.

1. Κάθε παρουσίαση της νέας θεωρίας στηρίζεται σε προγενέστερες έννοιες. Μια σύντομη ad hoc υπενθύμιση τους ίσως με κάποια παραδείγματα ενδέχεται να βοηθήσει κάποιους μαθητές να προχωρήσουν ευχερέστερα.
2. Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της θεωρίας. Κάποιοι μαθητές χρειάζονται περισσότερα από τους άλλους όπως επίσης και αρκετά σχήματα για την υποβοήθηση της κατανόησης.

Πλαισίωση της θεωρίας.

1. Κάθε παρουσίαση της νέας θεωρίας στηρίζεται σε προγενέστερες έννοιες. Μια σύντομη ad hoc υπενθύμιση τους ίσως με κάποια παραδείγματα ενδέχεται να βοηθήσει κάποιους μαθητές να προχωρήσουν ευχερέστερα.
2. Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της θεωρίας. Κάποιοι μαθητές χρειάζονται περισσότερα από τους άλλους όπως επίσης και αρκετά σχήματα για την υποβοήθηση της κατανόησης.
3. Οι επεκτάσεις της θεωρίας καθώς και οι θεωρητικές συνδέσεις βοηθούν στην εμβάθυνση ιδίως τους πιο κατατοπισμένους μαθητές.

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Πως; Ασκήσεις.

Μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις.

Μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις.
Οι ασκήσεις είναι, πρακτικά, ο μόνος τρόπος για να μάθουν τα παιδιά Μαθηματικά. Η επιλογή τους έχει μεγάλη σημασία. Δεν είναι όλες της ίδιας αξίας ούτε και την ίδιας δυσκολίας. Η αξία μια άσκησης έγκειται:

Μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις.
Οι ασκήσεις είναι, πρακτικά, ο μόνος τρόπος για να μάθουν τα παιδιά Μαθηματικά. Η επιλογή τους έχει μεγάλη σημασία. Δεν είναι όλες της ίδιας αξίας ούτε και την ίδιας δυσκολίας. Η αξία μια άσκησης έγκειται:

1. Στις δυνατότητες που δίνει στο μαθητή να σκεφτεί να ενεργήσει και με την βοήθεια της να κατανοήσει έννοιες και να εμπεδώσει διαδικασίες.

Η διαφοροποίηση πριν τις εξετάσεις: Πως; Ασκήσεις.

Μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις.
Οι ασκήσεις είναι, πρακτικά, ο μόνος τρόπος για να μάθουν τα παιδιά Μαθηματικά. Η επιλογή τους έχει μεγάλη σημασία. Δεν είναι όλες της ίδιας αξίας ούτε και την ίδιας δυσκολίας. Η αξία μια άσκησης έγκειται:

1. Στις δυνατότητες που δίνει στο μαθητή να σκεφτεί να ενεργήσει και με την βοήθεια της να κατανοήσει έννοιες και να εμπεδώσει διαδικασίες.
2. Η επεκτασιμότητα της άσκησης σε απλούστερα ή συνθετότερα καθήκοντα ώστε να καλύψει τις δυνατότητες του συνόλου των μαθητών. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος επιτυγχάνεται συχνά με το στήσιμο μια σκαλωσιάς από ένα ή περισσότερα απλούστερα ή συναφή προβλήματα.

Μελετημένη εμπλοκή των μαθητών στις ασκήσεις.
Οι ασκήσεις είναι, πρακτικά, ο μόνος τρόπος για να μάθουν τα παιδιά Μαθηματικά. Η επιλογή τους έχει μεγάλη σημασία. Δεν είναι όλες της ίδιας αξίας ούτε και την ίδιας δυσκολίας. Η αξία μια άσκησης έγκειται:

1. Στις δυνατότητες που δίνει στο μαθητή να σκεφτεί να ενεργήσει και με την βοήθεια της να κατανοήσει έννοιες και να εμπεδώσει διαδικασίες.
2. Η επεκτασιμότητα της άσκησης σε απλούστερα ή συνθετότερα καθήκοντα ώστε να καλύψει τις δυνατότητες του συνόλου των μαθητών. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος επιτυγχάνεται συχνά με το στήσιμο μια σκαλωσιάς από ένα ή περισσότερα απλούστερα ή συναφή προβλήματα.
3. Επίσης ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ασκήσεις που προωθούν την συνοχή, που «δένουν» αυτά που διδάχθηκαν οι μαθητές.

Παραδείγματα: Τι προτείνουν και τι όχι.

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Παραδείγματα: Τι προτείνουν και τι όχι.

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

- Επιχειρούν να αναδείξουν την βασική ιδέα μίας «ήπιας» διαφοροποιημένης παρέμβασης.

Παραδείγματα:
Τι προτείνουν και τι όχι.

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

- Επιχειρούν να αναδείξουν την βασική ιδέα μίας «ήπιας» διαφοροποιημένης παρέμβασης.
- Αποσκοπούν στο να δείξουν πως μπορεί να επιτευχθεί διαφοροποίηση κατά την διδασκαλία ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. (Παραδείγματα 1-5) αλλά και θεωρίας (Παράδειγμα 6).

Παραδείγματα: Τι προτείνουν και τι όχι.

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

- Επιχειρούν να αναδείξουν την βασική ιδέα μίας «ήπιας» διαφοροποιημένης παρέμβασης.
- Αποσκοπούν στο να δείξουν πως μπορεί να επιτευχθεί διαφοροποίηση κατά την διδασκαλία ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. (Παραδείγματα 1-5) αλλά και θεωρίας (Παράδειγμα 6).
- Στα παραδείγματα γίνονται νύξεις για επιλογές που μπορεί να κάνει ο δάσκαλος.

Παραδείγματα:
Τι προτείνουν και τι όχι.

Στα επόμενα δούμε 6 παραδείγματα διαφοροποίησης που εξειδικεύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

- Επιχειρούν να αναδείξουν την βασική ιδέα μίας «ήπιας» διαφοροποιημένης παρέμβασης.
- Αποσκοπούν στο να δείξουν πως μπορεί να επιτευχθεί διαφοροποίηση κατά την διδασκαλία ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. (Παραδείγματα 1-5) αλλά και θεωρίας (Παράδειγμα 6).
- Στα παραδείγματα γίνονται νύξεις για επιλογές που μπορεί να κάνει ο δάσκαλος.
- Ποια θα είναι τελική επιλογή του υλικού, ποια η μορφή με την οποία θα δοθεί στους μαθητές (φύλλα εργασίας, κάρτες, φυλλάδιο, παρουσίαση στον πίνακα κ.α.), πως θα γίνει η εργασία στην τάξη και πως η κατ᾽ οίκον εργασία είναι αποφάσεις που θα πάρει ο δάσκαλος.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

(Άσκηση Β6 παράγραφος 2.7)
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2,$$

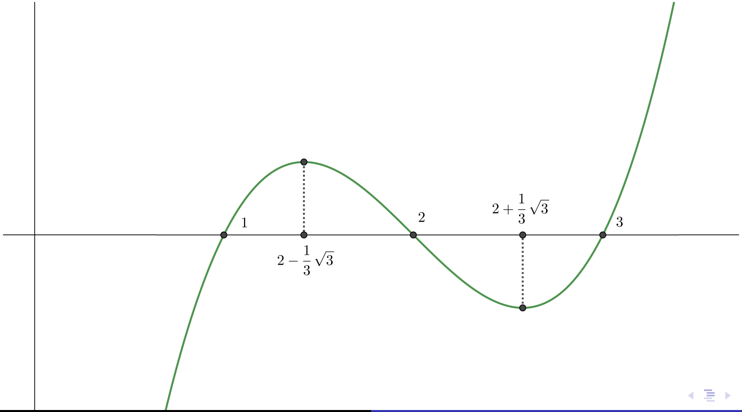
με $\alpha < \beta < \gamma$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Παράδειγμα 1:
Με αριθμητικά δεδομένα I & οι παράγοντες στον πρώτο βαθμό.

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Παράδειγμα 1:
Με αριθμητικά δεδομένα I & οι παράγοντες στον πρώτο βαθμό.

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$



Παράδειγμα 1:
Με αριθμητικά δεδομένα II & οι παράγοντες στον δεύτερο βαθμό.

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 .$$

Παράδειγμα 1:
Με αριθμητικά δεδομένα II & οι παράγοντες στον δεύτερο βαθμό.

$$f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2 (x-3)^2 .$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)\left(3x^2 - 12x + 11\right)$$

Παράδειγμα 1:
Με αριθμητικά δεδομένα II & οι παράγοντες στον δεύτερο βαθμό.

$$f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2 (x-3)^2 .$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)\left(3x^2 - 12x + 11\right)$$

x	$-\infty$		1		$2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$		2		$2+\frac{1}{3}\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$+$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+11$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	τ.ε.	↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Παραγοντοποίηση της παραγώγου.

$$f(x) = (x - a)^2 (x - \beta)^2 (x - \gamma)^2$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Παραγοντοποίηση της παραγώγου.

$$f(x) = (x - a)^2 (x - \beta)^2 (x - \gamma)^2$$

$$f'(x) = 2(x - a)(x - \beta)(x - \gamma)\left(3x^2 - 2(a + \beta + \gamma)x + a\beta + \beta\gamma + \gamma a\right)$$

Παράδειγμα 1: Η γενική μορφή υπολογιστικά. Παραγοντοποίηση της παραγώγου.

$$f(x) = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2$$

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha\right)$$

Ο παράγοντας

$$3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad (*)$$

έχει διακρίνουσα

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha$$

η οποία είναι θετική όπως μπορεί να διαπιστωθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας της παραγώγου έχει ρίζες.

1. Γράφοντας

$$a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-\beta\gamma-\gamma a=\frac{1}{2}\left(2a^2+2\beta^2+2\gamma^2-2a\beta-2\beta\gamma-2\gamma a\right)$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας της παραγώγου έχει ρίζες.

1. Γράφοντας

$$a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-\beta\gamma-\gamma a=\frac{1}{2}\left(2a^2+2\beta^2+2\gamma^2-2a\beta-2\beta\gamma-2\gamma a\right)$$

που γίνεται

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας της παραγώγου έχει ρίζες.

1. Γράφοντας

$$a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-\beta\gamma-\gamma a=\frac{1}{2}\left(2a^2+2\beta^2+2\gamma^2-2a\beta-2\beta\gamma-2\gamma a\right)$$

που γίνεται

$$\frac{1}{2}\left((a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2\right)>0.$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας της παραγώγου έχει ρίζες.

1. Γράφοντας

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)$$

   που γίνεται

$$\frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right) > 0.$$

2. Θεωρώντας το ως τριώνυμο λ.χ. του γ που γίνεται

$$\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Ο δευτεροβάθμιος παράγοντας της παραγώγου έχει ρίζες.

1. Γράφοντας

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)$$

   που γίνεται

$$\frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right) > 0.$$

2. Θεωρώντας το ως τριώνυμο λ.χ. του γ που γίνεται

$$\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$$

   και έχει διακρίνουσα

$$(\alpha+\beta)^2-4\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right) = -3(\alpha-\beta)^2 < 0.$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Σύγκριση ριζών.

Επομένως ο παράγοντας $(*)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ που πρέπει να συγκριθούν με τις α, β, γ. Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες και να γίνει απ' ευθείας σύγκριση. Πρόκειται για επίπονη διαδικασία.

Επομένως ο παράγοντας $(*)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ που πρέπει να συγκριθούν με τις α, β, γ. Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες και να γίνει απ' ευθείας σύγκριση. Πρόκειται για επίπονη διαδικασία.
2. Να ονομάσουμε

$$\varphi(x) = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Σύγκριση ριζών.

Επομένως ο παράγοντας $(*)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ που πρέπει να συγκριθούν με τις a, β, γ. Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες και να γίνει απ΄ ευθείας σύγκριση. Πρόκειται για επίπονη διαδικασία.
2. Να ονομάσουμε

$$\varphi(x) = 3x^2 - 2(a+\beta+\gamma)x + a\beta + \beta\gamma + \gamma a$$

Είναι

$$\varphi(a) = (a-\gamma)(a-\beta) > 0$$
$$\varphi(\beta) = (\gamma-\beta)(a-\beta) < 0$$

$$\varphi(\gamma) = (\gamma-\beta)(\gamma-a) > 0$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή υπολογιστικά. Σύγκριση ριζών.

Επομένως ο παράγοντας $(*)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ που πρέπει να συγκριθούν με τις a, β, γ. Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες και να γίνει απ᾽ ευθείας σύγκριση. Πρόκειται για επίπονη διαδικασία.
2. Να ονομάσουμε

$$\varphi(x) = 3x^2 - 2(a+\beta+\gamma)x + a\beta + \beta\gamma + \gamma a$$

Είναι

$$\varphi(a) = (a-\gamma)(a-\beta) > 0$$
$$\varphi(\beta) = (\gamma-\beta)(a-\beta) < 0$$

$$\varphi(\gamma) = (\gamma-\beta)(\gamma-a) > 0$$

Επομένως τα a, γ είναι εκτός των ριζών του τριωνύμου $\varphi(x)$ και το β μεταξύ. ᾽Αρα είναι

$$a < \rho_1 < \beta < \rho_2 < \gamma$$

Τελικά έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	α		ρ_1		β		ρ_2		γ	$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$+$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\gamma$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0		0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

από τον οποίο προκύπτει η απάντηση στο ερώτημα.

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Και μια γεωμετρική προσέγγιση.
Στην τελευταία πραγμάτευση είδαμε ότι

$$f(x) = g^2(x)$$

όπου

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Και μια γεωμετρική προσέγγιση.
Στην τελευταία πραγμάτευση είδαμε ότι

$$f(x) = g^2(x)$$

όπου

$$g(x) = (x - a)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Τα ακρότατα της g είναι εύκολο να βρεθούν (ήδη έγινε στην αρχή στην αριθμητική περίπτωση). Επομένως έχουμε το πρόβλημα:
Αν ξέρουμε τα ακρότατα της $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της g^2;

Παράδειγμα 1: Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει όταν η g παίρνει μη αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει όταν η g παίρνει μη αρνητικές τιμές.

Για μη αρνητικούς αριθμούς τα τετράγωνα τους μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται αν και μόνο αν οι αριθμοί μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται.

Διοτι: $p < q \Leftrightarrow p^2 < q^2$ αφού $q^2 - p^2 = (q-p)\underbrace{(q+p)}_{\geq 0}$ και

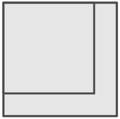
επομένως οι διαφορές $q^2 - p^2$ και $q - p$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει όταν η g παίρνει μη αρνητικές τιμές.
Για μη αρνητικούς αριθμούς τα τετράγωνα τους μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται αν και μόνο αν οι αριθμοί μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται.

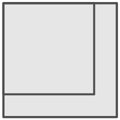
Διοτι: $p < q \Leftrightarrow p^2 < q^2$ αφού $q^2 - p^2 = (q-p)\underbrace{(q+p)}_{\geq 0}$ και

επομένως οι διαφορές $q^2 - p^2$ και $q - p$ έχουν το ίδιο πρόσημο.
Μία άλλη αιτιολόγηση είναι ότι από δύο τετράγωνα μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνο με την μεγαλύτερη πλευρά:



Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει όταν η g παίρνει μη αρνητικές τιμές.
Για μη αρνητικούς αριθμούς τα τετράγωνα τους μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται αν και μόνο αν οι αριθμοί μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται.
Διοτι: $p < q \Leftrightarrow p^2 < q^2$ αφού $q^2 - p^2 = (q-p)\underbrace{(q+p)}_{\geq 0}$ και
επομένως οι διαφορές $q^2 - p^2$ και $q - p$ έχουν το ίδιο πρόσημο.
Μία άλλη αιτιολόγηση είναι ότι από δύο τετράγωνα μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνο με την μεγαλύτερη πλευρά:



Επομένως για μη αρνητικές συναρτήσεις g οι g και g^2 έχουν τα ίδια ακρότατα.

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Τέλος για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Τέλος για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: Οι θέσεις ακροτάτων της $g^2(x) = |g(x)|^2$ είναι εκεί που παρουσιάζει ακρότατα η g συν τις ρίζες της. Ακριβέστερα:

Τέλος για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: Οι θέσεις ακροτάτων της $g^2(x) = |g(x)|^2$ είναι εκεί που παρουσιάζει ακρότατα η g συν τις ρίζες της. Ακριβέστερα:

- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με θετική τιμή παραμένουν ως έχουν.
- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με αρνητική τιμή αλλάζουν είδος.
- Θέσεις ριζών αντιστοιχούν σε ακρότατα (ελάχιστα)

Παράδειγμα 1:
Η γενική μορφή πάλι και κάποιες γενικεύσεις.

Τέλος για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: Οι θέσεις ακροτάτων της $g^2(x) = |g(x)|^2$ είναι εκεί που παρουσιάζει ακρότατα η g συν τις ρίζες της. Ακριβέστερα:

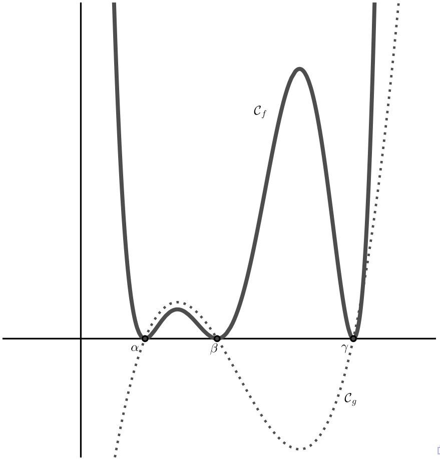
- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με θετική τιμή παραμένουν ως έχουν.
- Ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) με αρνητική τιμή αλλάζουν είδος.
- Θέσεις ριζών αντιστοιχούν σε ακρότατα (ελάχιστα)

Επιστρέφοντας στη συγκεκριμένη άσκηση βλέπουμε ότι η

$$g(x) = (x-a)(x-\beta)(x-\gamma),$$

έχει τρεις ρίζες ένα τοπικό ελάχιστο αρνητικό και ένα τοπικό μέγιστο θετικό.

Το τετράγωνο της $f(x) = g^2(x)$ θα έχει τρία ελάχιστα (στις ρίζες) θα διατηρήσει το θετικό μέγιστο και θα αποκτήσει ένα ακόμη τοπικό μέγιστο που αντιστοιχεί στο τοπικό έλαχιστο της g.



Παράδειγμα 2

(Άσκηση Α3 i) παράγραφος 1.1)
Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:
i) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$.

Μία εξοικείωση με την εκφώνηση μπορεί να γίνει μεταφράζοντας αριθμητικά το «βρίσκεται πάνω» και σύνθεση ενός πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-32	-11	-2	1	4	13	34
$g(x)$	-2	1	0	1	2	3	4

Παράδειγμα 2: Η βοήθεια της Άλγεβρας.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow$$

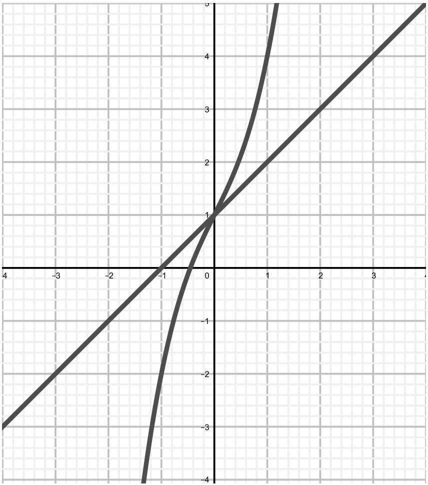
$$x^3 + x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x\underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{+} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Παράδειγμα 2: Εικονογράφηση με μία γραφική παράσταση.

Ένα φύλλο με την γραφική παράσταση μπορεί να βοηθήσει περαιτέρω την κατανόηση του «φαινομένου».



Παράδειγμα 2: Παραλαγές.

Μερικές πιο απαιτητικές παραλλαγές έχουν ενδιαφέρον:

Μερικές πιο απαιτητικές παραλλαγές έχουν ενδιαφέρον:

1. Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τις συναρτήσεις $(f(x)-1)^2$ και $(g(x)-1)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x \in \mathbb{R}^*$

Παράδειγμα 2: Παραλαγές.

Μερικές πιο απαιτητικές παραλλαγές έχουν ενδιαφέρον:

1. Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τις συναρτήσεις $(f(x)-1)^2$ και $(g(x)-1)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x \in \mathbb{R}^*$

2. Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα για τις συναρτήσεις $a^{f(x)}$, $a^{g(x)}$, $a>0,\ a\neq 1$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x>0$ αν $a>1$ και $x<0$ αν $a<1$.

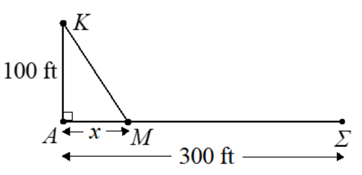
Παράδειγμα 3

(Άσκηση Β13, παράγραφος 2.7)

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100*ft* μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300*ft* μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα $3ft/s$ και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα $5ft/s$.

i) Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}.$$



ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

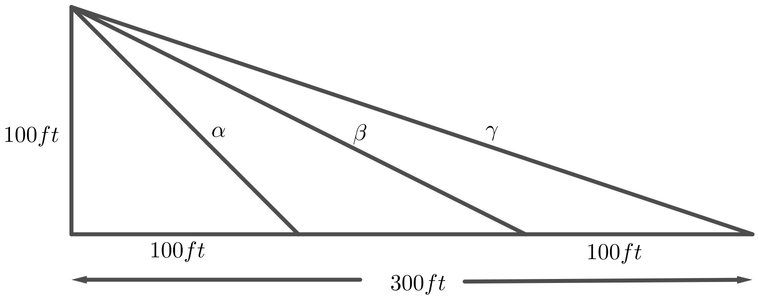
Παράδειγμα : Προεργασία.

Η συγκεκριμένη άσκηση έχει αρκετά προαπαιτούμενα που καλό είναι να συζητηθούν.

1. Ο τύπος της ταχύτητας στην ομαλή κίνηση και η επίλυση του ως προς τον χρόνο: $v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$

Η συγκεκριμένη άσκηση έχει αρκετά προαπαιτούμενα που καλό είναι να συζητηθούν.

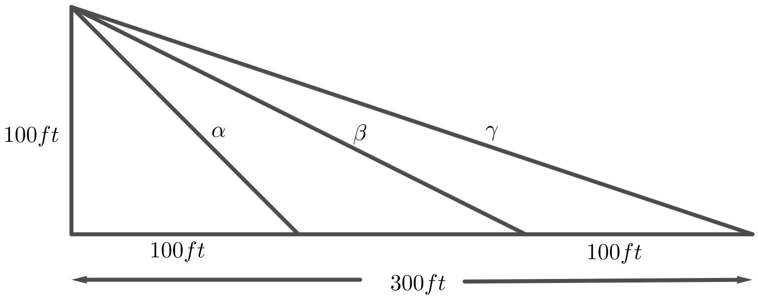
1. Ο τύπος της ταχύτητας στην ομαλή κίνηση και η επίλυση του ως προς τον χρόνο: $v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$
2. Το θεώρημα του Πυθαγόρα. Ίσως είναι σκόπιμο κάποιοι μαθητές να κάνουν τους υπολογισμούς των τμημάτων α, β, γ:



Παράδειγμα : Προεργασία.

Η συγκεκριμένη άσκηση έχει αρκετά προαπαιτούμενα που καλό είναι να συζητηθούν.

1. Ο τύπος της ταχύτητας στην ομαλή κίνηση και η επίλυση του ως προς τον χρόνο: $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$
2. Το θεώρημα του Πυθαγόρα. Ίσως είναι σκόπιμο κάποιοι μαθητές να κάνουν τους υπολογισμούς των τμημάτων α, β, γ:



Παράδειγμα : Η κυρίως λύση.

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{15}\,\frac{5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2}}{\sqrt{10\,000 + x^2}}$$

και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες :

Παράδειγμα : Η κυρίως λύση.

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{15}\,\frac{5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2}}{\sqrt{10\,000 + x^2}}$$

και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$T'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα : Η κυρίως λύση.

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{15}\frac{5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2}}{\sqrt{10\,000 + x^2}}$$

και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$T'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x > 3\sqrt{10\,000 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$(5x)^2 > \left(3\sqrt{10\,000 + x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

....

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{15}\,\frac{5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2}}{\sqrt{10\,000 + x^2}}$$

και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$T'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x > 3\sqrt{10\,000 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$(5x)^2 > \left(3\sqrt{10\,000 + x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Leftrightarrow x > 75$$

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{15}\frac{5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2}}{\sqrt{10\,000 + x^2}}$$

και επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$T'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - 3\sqrt{10\,000 + x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$5x > 3\sqrt{10\,000 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$(5x)^2 > \left(3\sqrt{10\,000 + x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

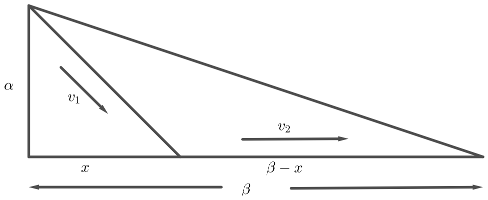
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow x > 75$$

Επομένως η T είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 75)$ και γνησίως αύξουσα στο $(75, 300)$. Άρα ο ελάχιστος χρόνος επιτυγχάνεται όταν $x = 75$.

Παράδειγμα : Η γενική περίπτωση.

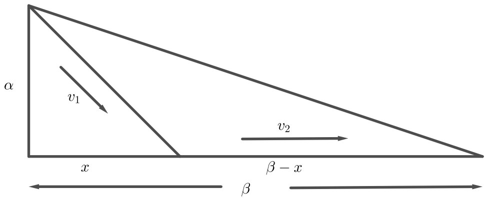
Είναι πιο δύσκολη αλλά και πιο ενδιαφέρουσα. Αν έχουμε την διάταξη:



Τότε ο συνολικός χρόνος είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\beta - x}{v_2}$$

Είναι πιο δύσκολη αλλά και πιο ενδιαφέρουσα. Αν έχουμε την διάταξη:



Τότε ο συνολικός χρόνος είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\beta - x}{v_2}$$

και

$$T'(x) = \frac{v_2 x - v_1 \sqrt{a^2 + x^2}}{v_1 v_2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783)

Η ΄Αλγεβρα είναι γενναιόδωρη. Συχνά μας δίνει περισσότερα απ΄ όσα της ζητάμε.

Παράδειγμα : Η γενική περίπτωση.

Είναι $T'(x) > 0$ όταν

$$x > \frac{v_1 a}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}},$$

όπου βέβαια υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στην στεριά είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στην θάλασσα.

Παράδειγμα : Η γενική περίπτωση.

Είναι $T'(x) > 0$ όταν

$$x > \frac{v_1 a}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}},$$

όπου βέβαια υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στην στεριά είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στην θάλασσα. Αν ονομάσουμε

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

τον λόγο των δύο ταχυτήτων τότε βρίσκουμε ότι η θέση όπου ο χρόνος ελαχιστοποιείται είναι η

$$\boxed{x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}.}$$

Παράδειγμα 4

(Άσκηση Α6, Παράγραφος 3.5)

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Παράδειγμα 4 : Προετοιμασία.

Για το πρώτο ερώτημα απαιτείται γνώση των κανόνων παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, λογαρίθμου, ρίζας και για το δεύτερο ερώτημα η σύνδεση παράγουσας και ορισμένου ολοκληρώματος και ιδιότητες λογαρίθμων. Για αρκετούς μαθητές μια υπενθύμιση βοηθάει.

Παράδειγμα 4 : Η κυρίως λύση.

Δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες.

Παράδειγμα 4 :Επεκτάσεις Ι.

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι να βρεθεί όχι μόνο η παράγωγος της f αλλά και μία παράγουσα της. Στην περίπτωση μας ένα ορισμένο ολοκλήρωμα:

> Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Έχουμε: $$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι να βρεθεί όχι μόνο η παράγωγος της f αλλά και μία παράγουσα της. Στην περίπτωση μας ένα ορισμένο ολοκλήρωμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Έχουμε: $$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx =$$
$$\int_a^\beta (x)' \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι να βρεθεί όχι μόνο η παράγωγος της f αλλά και μία παράγουσα της. Στην περίπτωση μας ένα ορισμένο ολοκλήρωμα:

> Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Έχουμε: $$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\int_a^\beta (x)'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_a^\beta - \int_a^\beta x\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'dx =$$

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι να βρεθεί όχι μόνο η παράγωγος της f αλλά και μία παράγουσα της. Στην περίπτωση μας ένα ορισμένο ολοκλήρωμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Έχουμε:
$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$
$$\int_a^\beta (x)'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$
$$\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_a^\beta - \int_a^\beta x\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'dx =$$
$$\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_a^\beta - \int_a^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις Ι.

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις I.

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $x^2 + 1 = u$ και κάνουμε τις αλλάγές:
$xdx \to \frac{1}{2}du$, $\alpha \to \alpha^2 + 1$, $\beta \to \beta^2 + 1$. Βρίσκουμε:

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις Ι.

Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $x^2+1=u$ και κάνουμε τις αλλάγές:
$xdx \to \frac{1}{2}du$, $a \to a^2+1$, $\beta \to \beta^2+1$. Βρίσκουμε:

$$\int_a^\beta \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{a^2+1}^{\beta^2+1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du =$$

$$\frac{1}{2}\int_{a^2+1}^{\beta^2+1} u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{a^2+1}^{\beta^2+1} = \sqrt{\beta^2+1} - \sqrt{a^2+1}$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις I.

Το ολοκλήρωμα $\int_{a}^{\beta} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $x^2 + 1 = u$ και κάνουμε τις αλλάγές:
$xdx \to \frac{1}{2}du$, $a \to a^2 + 1$, $\beta \to \beta^2 + 1$. Βρίσκουμε:

$$\int_{a}^{\beta} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{a^2+1}^{\beta^2+1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} du =$$

$$\frac{1}{2} \int_{a^2+1}^{\beta^2+1} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{a^2+1}^{\beta^2+1} = \sqrt{\beta^2+1} - \sqrt{a^2+1}$$

και επομένως:

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\, dx = \beta \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) - a \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$$

$$-\sqrt{\beta^2+1} + \sqrt{a^2+1}$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

Στην αρχική εκφώνηση η άσκηση του βιβλίου δεν ζητείται να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. Μπορεί να ζητηθεί ως πρόσθετη άσκηση:

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

Στην αρχική εκφώνηση η άσκηση του βιβλίου δεν ζητείται να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. Μπορεί να ζητηθεί ως πρόσθετη άσκηση:

> Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

Η τυπική αντιμετώπιση είναι

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

και επομένως η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Στην αρχική εκφώνηση η άσκηση του βιβλίου δεν ζητείται να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. Μπορεί να ζητηθεί ως πρόσθετη άσκηση:

> Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

Η τυπική αντιμετώπιση είναι

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

και επομένως η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
Σχολιο. Η αντιμετώπιση αυτή δεν είναι αυτονόητη. Στις εξετάσεις του 2010 χρειάστηκε οι μαθητές να επιβεβαιώσουν ότι η συνάρτηση $x + \sqrt{x^2 + 9}$ παίρνει θετικές τιμές. Βρέθηκαν γραπτά με την ακόλουθη τεκμηρίωση: Η εξίσωση $x + \sqrt{x^2 + 9} = 0$ είναι αδύνατη. ΄Αρα η συνεχής συνάρτηση $x + \sqrt{x^2 + 9}$ δεν έχει ρίζες άρα διατηρεί πρόσημο. Με δοκιμή βρίσκουμε ότι το πρόσημο είναι $+$ και επομένως για όλα τα x είναι $x + \sqrt{x^2 + 9} > 0$.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις II.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

> Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.
- Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\underbrace{x + \sqrt{x^2 + 1}}_{u}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

> Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{u}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$
- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \underset{x<0}{=} \dots\dots\dots = 0$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.
- Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\underbrace{x + \sqrt{x^2 + 1}}_{u}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$
- Είναι

  $$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) \underset{x<0}{=} \ldots\ldots\ldots = 0$$

  Επομένως

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\underbrace{x + \sqrt{x^2 + 1}}_{u}\right) = \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty.$$

Μια άλλη ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί είναι:

> Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της της $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$.

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Η f έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{u}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$
- Είναι
  $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \underset{x<0}{=} \dots\dots\dots = 0$$
  Επομένως
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{u}\right) = \lim_{u\to0^+} \ln u = -\infty.$$
  Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

- Είναι

$$y = f(x) \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

- Είναι

$$y = f(x) \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(e^y - x)^2 = \sqrt{x^2+1}^2 \Rightarrow e^{2y} - 2e^y x + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

- Είναι

$$y = f(x) \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(e^y - x)^2 = \sqrt{x^2+1}^2 \Rightarrow e^{2y} - 2e^y x + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{e^{2y}-1}{e^y} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙ.

- Είναι

$$y = f(x) \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(e^y - x)^2 = \sqrt{x^2+1}^2 \Rightarrow e^{2y} - 2e^y x + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{e^{2y}-1}{e^y} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Επομένως η αντίστροφη της f έχει τύπο

$$f^{-1}(y) = \frac{e^x - e^{--x}}{2}$$

Πρόκειται για το υπερβολικό ημίτονο.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις III.

Στις εξετάσεις του 2015 ζητήθηκε:

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙΙ.

Στις εξετάσεις του 2015 ζητήθηκε:

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

Στις εξετάσεις του 2015 ζητήθηκε:

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

Επειδή

$$f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

η f στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι κοίλη. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από την $y = x$ στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις III.

Στις εξετάσεις του 2015 ζητήθηκε:

> Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $y = x, x = 0, x = 1$.

Επειδή

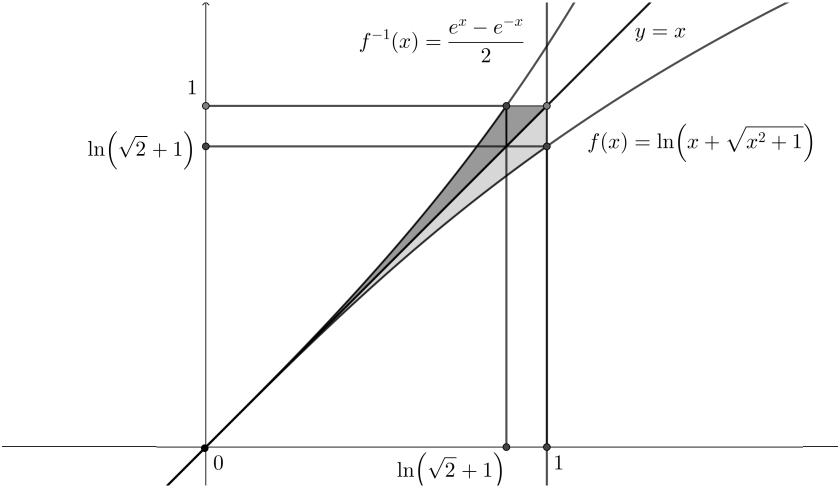
$$f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

η f στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι κοίλη. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από την $y = x$ στο $(0, +\infty)$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\int_0^1 (x - f(x))\,dx$ που είναι ίσο με $\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,dx$. Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο υπολογισμού του $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ όπου α το 0 και όπου β το 1 βρίσκουμε τελικά ότι το εμβαδόν είναι $\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Παράδειγμα 4: Επεκτάσεις ΙΙΙ.

Έχοντας βρει την αντίστροφη συνάρτηση της f μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με συμμετρία:



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την $y = x$ και την $y = 1$. Άρα το εμβαδό είναι:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right) dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{1} (1 - x)\, dx =$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την $y = x$ και την $y = 1$. Άρα το εμβαδό είναι:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right) dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^1 (1 - x)\, dx =$$

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx - \int_0^1 x dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^1 1 dx =$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την $y = x$ και την $y = 1$. Άρα το εμβαδό είναι:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right) dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^1 (1-x)\, dx =$$

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx - \int_0^1 x dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^1 1 dx =$$

$$\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left(1 - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) =$$

$$\frac{\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την $y = x$ και την $y = 1$. Άρα το εμβαδό είναι:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right) dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{1} (1-x)\, dx =$$

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx - \int_0^1 x dx + \int_{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{1} 1 dx =$$

$$\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left(1 - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Κάνοντας τους τελικούς υπολογισμούς βρίσκουμε πάλι την τιμή

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Παραδείγματα.

Παράδειγμα 5

('Ασκηση Α8 Παράγραφος 1.4 του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»)
Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 2x - 3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 5: Χρήση Γεωμετρίας.

Η ευθεία προφανώς δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από όλα τα σημεία της ευθείας πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων είναι το ίχνος της κάθετης που άγεται από την αρχή στην ευθεία. Η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως το 2 επομένως η κάθετη θα έχει το $-\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 5: Χρήση Γεωμετρίας.

Η ευθεία προφανώς δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από όλα τα σημεία της ευθείας πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων είναι το ίχνος της κάθετης που άγεται από την αρχή στην ευθεία. Η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως το 2 επομένως η κάθετη θα έχει το $-\frac{1}{2}$. Άρα η εξίσωση της κάθετης είναι $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$ δηλαδή $y = -\frac{1}{2}x$. Λύνοντας στο σύστημα:

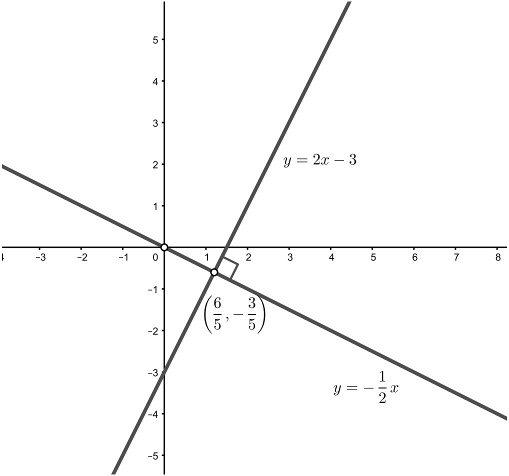
Παράδειγμα 5: Χρήση Γεωμετρίας.

Η ευθεία προφανώς δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από όλα τα σημεία της ευθείας πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων είναι το ίχνος της κάθετης που άγεται από την αρχή στην ευθεία. Η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως το 2 επομένως η κάθετη θα έχει το $-\frac{1}{2}$. Άρα η εξίσωση της κάθετης είναι $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$ δηλαδή $y = -\frac{1}{2}x$. Λύνοντας στο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y - -\frac{1}{2}x \end{array}\right\}$$

βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο των δύο ευθειών δηλαδή το ίχνος της κάθετης είναι το $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Παράδειγμα 5: Χρήση Γεωμετρίας.



Παράδειγμα 5: Χρήση Άλγεβρας.

Το τυχόν σημείο της ευθείας είναι το $(q, 2q-3)$ η δε απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι

$$\sqrt{(x-0)^2+(2x-3-0)^2}=\sqrt{5x^2-12x+9}.$$

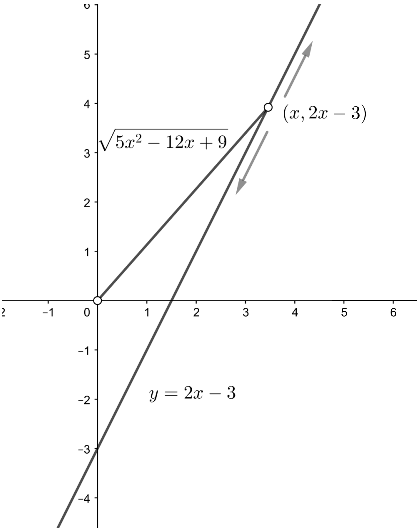
Παράδειγμα 5: Χρήση ΄Αλγεβρας.

Το τυχόν σημείο της ευθείας είναι το $\left(q, 2q-3\right)$ η δε απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι

$$\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(2x-3-0\right)^2} = \sqrt{5x^2-12x+9}.$$

Αυτή, προφανώς, γίνεται ελάχιστη όταν το $5x^2-12x+9$ γίνει ελάξιστο. Ξέρουμε ότι ένα τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha>0$ γίνεται ελάχιστο όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Εδώ $x=-\frac{-12}{2 \cdot 5}=\frac{6}{5}$. Η τετμημένη του ζητούμενου σημείου είναι $2\cdot\frac{6}{5}-3=-\frac{3}{5}$.

Παράδειγμα 5: Χρήση Άλγεβρας.



Παράδειγμα 5: Χρήση Ανάλυσης.

Εργαζόμαστε όπως πριν και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την

$$5x^2 - 12x + 9$$

η οποία έχει παράγωγο $10x - 12$. Για $x > \frac{6}{5}$ η παράγωγος είναι θετική ενώ για $x < \frac{6}{5}$ είναι αρνητική. Άρα έχει ελάχιστο στο $\frac{6}{5}$. Η συνέχεια όπως στο προηγούμενο.

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(0, 1)$ ελάχιστη απόσταση.

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(0, 1)$ ελάχιστη απόσταση.

Εδώ δεν έχουμε ευθεία και δεν εφαρμόζεται η πρώτη προσέγγιση. Το τυχόν σημείο της καμπύλης είναι το (x, x^2) και η απόσταση του από το σημείο μας είναι

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

Επομένως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Η απάντηση μπορεί να δοθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Α΄ τρόπος. Εδώ συμβαίνει να μπορεί να εφαρμοσθεί η δεύτερη τεχνική, με το τριώνυμο, που είδαμε στην προηγούμενη άσκηση θέτοντας $x^2 = u$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $u^2 - u + +1$ που γίνεται ελάχιστη για $u = \frac{1}{2}$.

Α΄ τροπος. Εδώ συμβαίνει να μπορεί να εφαρμοσθεί η δεύτερη τεχνική, με το τριώνυμο, που είδαμε στην προηγούμενη άσκηση θέτοντας $x^2 = u$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $u^2 - u + +1$ που γίνεται ελάχιστη για $u = \frac{1}{2}$. ΄Αρα η f ελαχιστοποιείται όταν $x^2 = \frac{1}{2}$ δηλαδή $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ή $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Συνεπώς τα αντίστοιχα σημεία είναι τα $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Β′ ΤΡΟΠΟΣ. Η τεχνική με την παράγωγο εφαρμόζεται άμεσα:
$f(x) = x^4 - x^2 + +1$ και $f'(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right)$.

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Β΄ τροπος. Η τεχνική με την παράγωγο εφαρμόζεται άμεσα:
$f(x) = x^4 - x^2 + +1$ και $f'(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right)$. Έχουμε τον πίνακα:

x		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
$2x^2-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

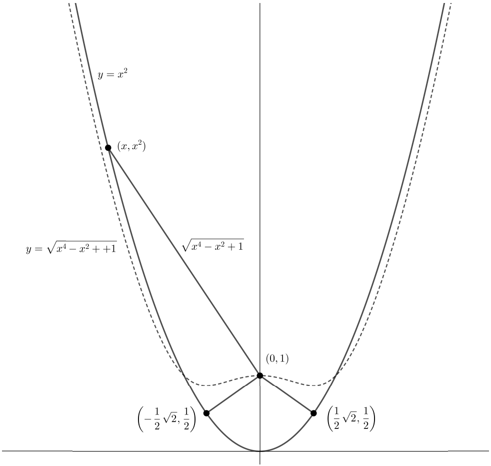
Β΄ τροπος. Η τεχνική με την παράγωγο εφαρμόζεται άμεσα:
$f(x) = x^4 - x^2 + +1$ και $f'(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right)$. Έχουμε τον πίνακα:

x		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
$2x^2-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

Επειδή ο τιμές της f στα $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ είναι ίσες και οι δύο αποτελεούν θέσεις ολικού ελαχίστου. Εδώ αξίζει να σχολιασθεί η θέση 0 που είναι θέση μόνον τοπικού μεγίστου και όχι ολικού αφού η απόσταση στα $\pm\infty$ έχει όριο $+\infty$ άρα δεν έχει μέγιστη τιμή.

Παράδειγμα 5: Η πρώτη επέκταση.

Στο σχήμα που ακολουθεί (μπορεί να δοθεί στην τάξη για συζήτηση) εμφανίζεται η κοινή γραφική παράσταση των x^2 και $\sqrt{(x^4 - x^2 + 1)}$.



Παράδειγμα 5: Δύο ακόμη επεκτάσεις.

Μπορούν να δοθούν και οι επόμενες δύο ασκήσεις:

1. Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(1, 2)$ ελάχιστη απόσταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ζητάμε, τελικά, το ελάχιστο της

$$r(x) = x^4 - 3x^2 - 2x + 5,$$

που επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Παράδειγμα 5: Δύο ακόμη επεκτάσεις.

Μπορούν να δοθούν και οι επόμενες δύο ασκήσεις:

1. Να βρεθεί σημείο της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $(1, 2)$ ελάχιστη απόσταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ζητάμε, τελικά, το ελάχιστο της

$$r(x) = x^4 - 3x^2 - 2x + 5,$$

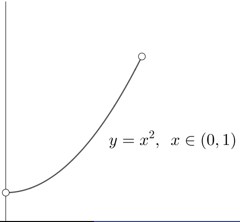
που επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. (Από διαγώνισμα που δόθηκε στο 3ο Λύκειο Ν. Σμύρνης το 2003 με βάση την άσκηση Α3 i), παράγραφος 2.8) Να βρεθεί σημείο της γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$ που απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\left(\pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα.

Οι προηγούμενες ασκήσεις έχουν ένα λίγο-πολύ αλγοριθμικό και υπολογιστικό χαρακτήρα. Υπήρχε μία συγκεκριμένη διαδικασία που αν ξεπερνούσε τα υπολογιστικά εμπόδια (τέτοια υπάρχουν πάντα) έδινε αποτέλεσμα. Η ύπαρξη σημείου στην γραφική παράσταση μια συνάρτησης που απέχει ελάχιστη απόσταση από δοθέν σημείο δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη. Για παράδειγμα στη συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ δεν υπάρχει σημείο της γραφικής της παράστασης που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σημείο όπου «έπρεπε» να εμφανίζεται η ελάχιστη, δηλαδή το σημείο $(0, 1)$ απόσταση δεν υπάρχει στην γραφική παράσταση.



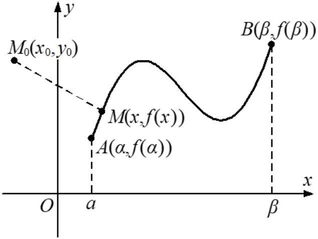
Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 1ο.

(Άσκηση Β9, Παράγραφος 1.8) Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και το $M_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.

i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από

ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

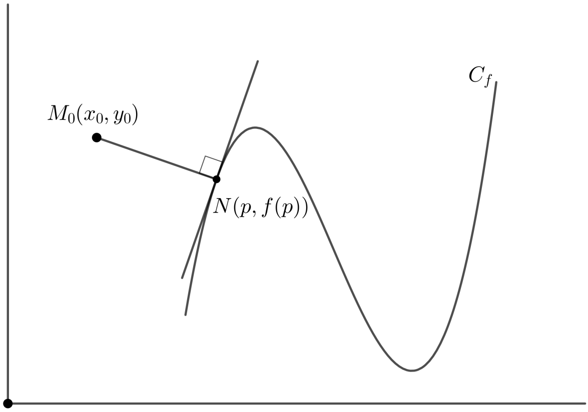


Στην άσκηση αυτή είναι ουσιώδες να αναδειχθεί η σημασία των υποθέσεων με κατάλληλα αντιπαραδείγματα. Για την σημασία του κλειστού διαστήματος έγινε αναφορά πιο πάνω ενώ η σημασία της συνέχειας της f φαίνεται στην περίπτωση όπου το M_0 είναι το $(0,0)$ και

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 2, & x = 0 \end{cases} .$$

Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι αν για κάποιο σημείο $N(p, f(p))$ της C_f η απόσταση M_0N γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη και το p είναι εσωτερικό σημείο του Δ τότε η ευθεία M_0N είναι κάθετη στην C_f στο N.

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.



Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόσταση του τυχόντος σημείου $(x, f(x))$ της C_f από το M_0 είναι

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

Απόδειξη. Η απόσταση του τυχόντος σημείου $(x, f(x))$ της C_f από το M_0 είναι

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

και

$$d'(x) = \frac{(x - x_0) + f'(x)(f(x) - y_0)}{d(x)}.$$

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$.

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$. Άρα

$$(p - x_0) + f'(p)(f(p) - y_0) = 0 \quad (\diamond).$$

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$. Άρα

$$(p - x_0) + f'(p)(f(p) - y_0) = 0 \quad (\diamond).$$

Είναι $\overrightarrow{M_0N} = (p - x_0, f(p) - y_0)$ και το διάνυσμα $\vec{u} = (1, f'(p))$ είναι παράλληλο στην εφαπτομένη της C_f στο N διότι έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως.

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$. Άρα

$$(p - x_0) + f'(p)(f(p) - y_0) = 0 \quad (\diamond).$$

Είναι $\overrightarrow{M_0N} = (p - x_0, f(p) - y_0)$ και το διάνυσμα $\vec{u} = (1, f'(p))$ είναι παράλληλο στην εφαπτομένη της C_f στο N διότι έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως. Η $(\diamond)$ μας πληροφορεί ότι το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων είναι μηδέν και επομένως είναι κάθετα.

Παράδειγμα 5: Δύο θέματα θεωρητικού χαρακτήρα. Θέμα 2ο. Συνέχεια.

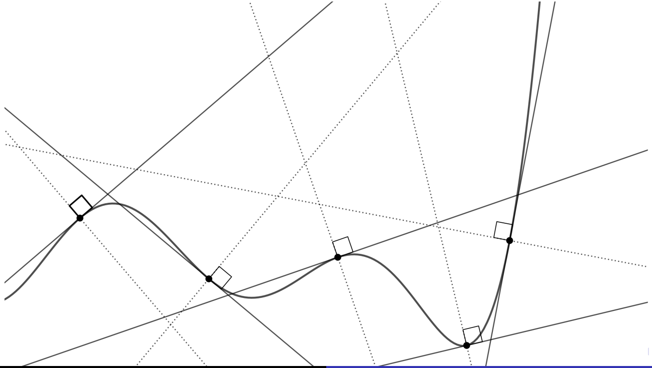
Αφού το $d(x)$ έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο p θα είναι, από το θεώρημα του Fermat, $d'(p) = 0$. Άρα

$$(p - x_0) + f'(p)(f(p) - y_0) = 0 \quad (\diamond).$$

Είναι $\overrightarrow{M_0N} = (p - x_0, f(p) - y_0)$ και το διάνυσμα $\vec{u} = (1, f'(p))$ είναι παράλληλο στην εφαπτομένη της C_f στο N διότι έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως. Η $(\diamond)$ μας πληροφορεί ότι το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων είναι μηδέν και επομένως είναι κάθετα. Άρα η M_0N είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Επισκόπηση.

Στα προηγούμενα δόθηκε η δυνατότητα να συζητηθεί η έννοια της κάθετης που οι μάθητες γνώρισαν για πρώτη φορά στην ευθεία και της εφαπτομένης, έννοιας που πρωτογνώρισαν στον κύκλο. Οι δύο αυτές έννοιες είδαμε ότι συνδέονται με την μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση αποστάσεων σημείου από καμπύλη. Οι καμπύλες-γραφικές παραστάσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων διαθέτουν εφαπτομένη και κάθετη σε κάθε σημείο τους.



Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Δύο ασκήσεις.

Στο σημείο αυτό μπορούν να δοθούν δύο ενδιαφέρουσες αλλά κάπως απαιτητικές ασκήσεις.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Δύο ασκήσεις.

Στο σημείο αυτό μπορούν να δοθούν δύο ενδιαφέρουσες αλλά κάπως απαιτητικές ασκήσεις.

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν όλες οι εφαπτομένες της C_f διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η C_f είναι ευθεία.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Δύο ασκήσεις.

Στο σημείο αυτό μπορούν να δοθούν δύο ενδιαφέρουσες αλλά κάπως απαιτητικές ασκήσεις.

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν όλες οι εφαπτομένες της C_f διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η C_f είναι ευθεία.

2. Έστω $f : [a, \beta,] \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν όλες οι κάθετες της C_f διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η C_f είναι τόξο κύκλου.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης.

Έστω (p, q) το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Η τυχούσα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης.

Έστω (p, q) το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Η τυχούσα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το (p, q), για κάθε x_0 θα ισχύει:

$$q - f(x_0) = f'(x_0)(p - x_0).$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης.

Έστω (p, q) το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Η τυχούσα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το (p, q), για κάθε x_0 θα ισχύει:

$$q - f(x_0) = f'(x_0)(p - x_0).$$

Επομένως για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$q - f(x) = f'(x)(p - x).$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης.

Έστω (p, q) το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι εφαπτομένες. Η τυχούσα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το (p, q), για κάθε x_0 θα ισχύει:

$$q - f(x_0) = f'(x_0)(p - x_0).$$

Επομένως για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$q - f(x) = f'(x)(p - x).$$

ή ισοδύναμα

$$f'(x)(p - x) + f(x) = q \quad .(\heartsuit)$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Εργαζόμαστε με τα $x \in (p, +\infty)$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της $(\heartsuit)$ με $p - x$ και έχουμε:

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Εργαζόμαστε με τα $x \in (p, +\infty)$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της $(\heartsuit)$ με $p - x$ και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{1}{p-x} f(x) = \frac{q}{p-x}$$

Είναι $\frac{1}{p-x} = (-\ln(x-p))'$.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Εργαζόμαστε με τα $x \in (p, +\infty)$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της $(\heartsuit)$ με $p - x$ και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{1}{p-x} f(x) = \frac{q}{p-x}$$

Είναι $\frac{1}{p-x} = (-\ln(x-p))'$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $e^{-\ln(x-p)}$ και έχουμε:

$$f'(x) e^{-\ln(x-p)} + \frac{1}{p-x} e^{-\ln(x-p)} f(x) = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Εργαζόμαστε με τα $x \in (p, +\infty)$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της $(\heartsuit)$ με $p - x$ και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{1}{p-x} f(x) = \frac{q}{p-x}$$

Είναι $\frac{1}{p-x} = (-\ln(x-p))'$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $e^{-\ln(x-p)}$ και έχουμε:

$$f'(x)e^{-\ln(x-p)} + \frac{1}{p-x} e^{-\ln(x-p)} f(x) = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

ή αλλιώς

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x} e^{-\ln(x-p)}$$

από την οποία προκύπτει διαδοχικά:

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = \left(\frac{q}{x-p}\right)'$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = \left(\frac{q}{x-p}\right)'$$

$$\frac{f(x)}{x-p} = \frac{q}{x-p} + k$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = \left(\frac{q}{x-p}\right)'$$

$$\frac{f(x)}{x-p} = \frac{q}{x-p} + k$$

$$f(x) = k\,(x-p) + q \quad x > p.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

$$\left(f(x)e^{-\ln(x-p)}\right)' = \frac{q}{p-x}e^{-\ln(x-p)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = -\frac{q}{(x-p)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-p}\right)' = \left(\frac{q}{x-p}\right)'$$

$$\frac{f(x)}{x-p} = \frac{q}{x-p} + k$$

$$f(x) = k\,(x-p) + q \quad x > p.$$

Εργαζόμαστε με τα $x \in (-\infty, p)$ και με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$f(x) = m\,(x-p) + q \quad x > p$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Από την $(\heartsuit)$ θέτοντας $x = p$ βρίκουμε ότι $f(p) = q$.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Από την $(\heartsuit)$ θέτοντας $x = p$ βρίκουμε ότι $f(p) = q$. Τέλος αφού η f είναι παραγωγίσιμη ιδιαιτέρως για την παράγωγο στο p θα ισχύει:

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Από την ($\heartsuit$) θέτοντας $x = p$ βρίκουμε ότι $f(p) = q$. Τέλος αφού η f είναι παραγωγίσιμη ιδιαιτέρως για την παράγωγο στο p θα ισχύει:

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x\to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

δηλαδή:

$$\lim_{x\to p^-} \frac{m(x-p) + q - q}{x - p} = \lim_{x\to p^+} \frac{k(x-p) + q - q}{x - p}$$

από την οποία βρίσκουμε $m = k$. Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = k(x-p) + q.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 1ης άσκησης (συνέχεια).

Από την ($\heartsuit$) θέτοντας $x = p$ βρίκουμε ότι $f(p) = q$. Τέλος αφού η f είναι παραγωγίσιμη ιδιαιτέρως για την παράγωγο στο p θα ισχύει:

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

δηλαδή:

$$\lim_{x \to p^-} \frac{m(x-p) + q - q}{x - p} = \lim_{x \to p^+} \frac{k(x-p) + q - q}{x - p}$$

από την οποία βρίσκουμε $m = k$. Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = k(x - p) + q.$$

Προφανώς κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής είναι λύση του προβλήματος.
Επομένως λύσεις του προβλήματος είναι οι γραμμικές συναρτήσεις $y = ax + \beta$ που διέρχονται από το (p, q)

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ θα έχει εξίσωση:

$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ θα έχει εξίσωση:

$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$

Η κάθετη σε αυτήν θα έχει εξίσωση $x + f'(x_0)y + L = 0$ και αφού διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ είναι $L = -x_0 - f'(x_0)f(x_0)$ άρα τελικά είναι η:

$$x + f'(x_0)y - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ θα έχει εξίσωση:

$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$

Η κάθετη σε αυτήν θα έχει εξίσωση $x + f'(x_0)y + L = 0$ και αφού διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ είναι $L = -x_0 - f'(x_0)f(x_0)$ άρα τελικά είναι η:

$$x + f'(x_0)y - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0$$

Αφού θα διέρχεται από το (p, q) για όλα τα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ θα είναι:

$$p + f'(x_0)q - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ θα έχει εξίσωση:

$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$

Η κάθετη σε αυτήν θα έχει εξίσωση $x + f'(x_0)y + L = 0$ και αφού διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ είναι $L = -x_0 - f'(x_0)f(x_0)$ άρα τελικά είναι η:

$$x + f'(x_0)y - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0$$

Αφού θα διέρχεται από το (p, q) για όλα τα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ θα είναι:

$$p + f'(x_0)q - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0.$$

Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$f'(x)(f(x) - q) + (x - p) = 0,$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ θα έχει εξίσωση:

$$f'(x_0)x - y + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0.$$

Η κάθετη σε αυτήν θα έχει εξίσωση $x + f'(x_0)y + L = 0$ και αφού διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ είναι $L = -x_0 - f'(x_0)f(x_0)$ άρα τελικά είναι η:

$$x + f'(x_0)y - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0$$

Αφού θα διέρχεται από το (p, q) για όλα τα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ θα είναι:

$$p + f'(x_0)q - x_0 - f'(x_0)f(x_0) = 0.$$

Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$f'(x)(f(x) - q) + (x - p) = 0,$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

δηλαδή

$$\left(\frac{(x-p)^2}{2}+\frac{((f(x)-q))^2}{2}\right)'=0$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

δηλαδή

$$\left(\frac{(x-p)^2}{2}+\frac{((f(x)-q))^2}{2}\right)'=0$$

Άρα:

$$\frac{(x-p)^2}{2}+\frac{((f(x)-q))^2}{2}=c$$

ή αλλιώς:

$$(x-p)^2+(f(x)-q)^2=\left(c\sqrt{2}\right)^2.$$

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

δηλαδή

$$\left(\frac{(x-p)^2}{2}+\frac{((f(x)-q))^2}{2}\right)'=0$$

Άρα:

$$\frac{(x-p)^2}{2}+\frac{((f(x)-q))^2}{2}=c$$

ή αλλιώς:

$$(x-p)^2+(f(x)-q)^2=\left(c\sqrt{2}\right)^2.$$

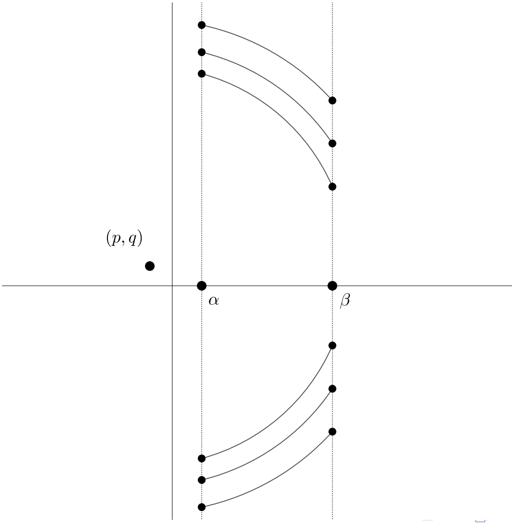
Θέτοντας $r=\sqrt{2c}$ βρίσκουμε ότι η C_f βρίσκεται στον κύκλο με εξίσωση

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

και επειδή είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι τόξο του.

Παράδειγμα 5: Κάθετες και εφαπτομένες. Λύση της 2ης άσκησης.

Τα τόξα του σχήματος είναι μερικές λύσεις του προβλήματος:



Παράδειγμα 6

(Η Θεωρία της υποπαραγράφου της 1.3 «Συνάρτηση 1 – 1»

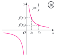
Συνάρτηση 1–1

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \neq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή:

"Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$",

που σημαίνει ότι:

"Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες".



Λόγω της τελευταίας ιδιότητας η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ λέγεται συνάρτηση 1–1 (ένα προς ένα). Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Εδώ μπορεί
να δοθεί απόδειξη

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

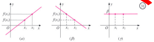
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Έτσι για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι συνάρτηση 1–1. (Σχ. 31α, β)

Αριθμητικές ασκήσεις
για τις 1-1 συναρτήσεις.



Χρειάζονται περισσότερα
παραδείγματα συναρτήσεων
που είναι ή δεν είναι 1-1.

αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

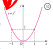
$$\alpha x_1 + \beta = \alpha x_2 + \beta$$

$$\alpha x_1 = \alpha x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

— Η συνάρτηση $f(x) = \beta$ δεν είναι συνάρτηση 1–1 (Σχ. 31γ), αφού $f(x_1) = f(x_2) = \beta$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ (Σχ. 32) δεν είναι συνάρτηση 1–1, αφού $f(-1) = f(1) = 1$ αν και είναι $-1 \neq 1$.



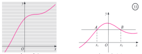
ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν:

— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).

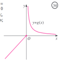
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1–1".



συνάρτηση 1–1   συνάρτηση όχι 1–1

Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $f_2(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$, $f_3(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $f_4(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι συναρτήσεις 1–1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} x & , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x > 0 \end{cases} \quad \text{(Σχ. 34).}$$



Επιστροφή:

Αν μια συνεχής συνάρτηση
είναι ορισμένη σε διάστημα
και είναι 1-1 τότε είναι
γνησίως μονότονη.

Αν μία συνάρτηση είναι
παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα
και η παράγωγος δεν
μηδενίζεται τότε
είναι 1-1.

Αν μια συνάρτηση είναι
παραγωγίσιμη σε ένα
διάστημα και η παράγωγος
δεν μηδενίζεται τότε είναι
γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα 6: Ερωτήματα στην θεωρία.

Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

Παράδειγμα 6: Ερωτήματα στην θεωρία.

Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

- Λείπουν κάποιες εξηγήσεις;

Παράδειγμα 6: Ερωτήματα στην θεωρία.

Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

- Λείπουν κάποιες εξηγήσεις;
- Υπάρχουν σημεία που χρειάζονται συμπληρώσεις;

Παράδειγμα 6: Ερωτήματα στην θεωρία.

Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

- Λείπουν κάποιες εξηγήσεις;
- Υπάρχουν σημεία που χρειάζονται συμπληρώσεις;
- Πως μπορεί το κείμενο να γίνει προσπελάσιμο;

Παράδειγμα 6: Ερωτήματα στην θεωρία.

Μερικά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν είναι:

- Λείπουν κάποιες εξηγήσεις;
- Υπάρχουν σημεία που χρειάζονται συμπληρώσεις;
- Πως μπορεί το κείμενο να γίνει προσπελάσιμο;
- Χρειαζεται στο μέλλον, όταν η διδασκαλία διανύει άλλα μέρη της ύλης, να γίνει επιστροφή;

Παράδειγμα 6: Απλά ερωτήματα.

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 1.$

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 1.$
2. $f(x) = \begin{cases} -x & |x| < 1 \\ x & |x| \geq 1 \end{cases}$

Παράδειγμα 6: Απλά ερωτήματα.

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)+1.$
2. $f(x) = \begin{cases} -x & |x| < 1 \\ x & |x| \geq 1 \end{cases}$
3. $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \alpha \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

Να δοθεί η απόδειξη του κριτηρίου για τις 1-1 που είναι αναπόδεικτο.

Η απόδειξη είναι συντομότατη και προφέρει στην κατανόηση. Να γίνει σύγκριση ορισμού και κριτηρίου στις περιπτώσεις:

Να εξεταστεί αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = -2x - 1 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \mathcal{D}_f = [1, +\infty)$

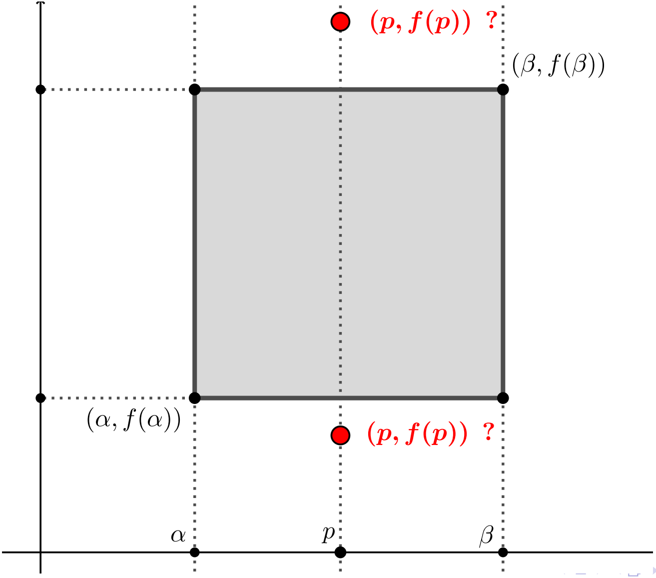
Παράδειγμα 6: Επιστροφή 1η. Μετά την διδασκαλία της συνέχειας σε διάστημα.

Μπορεί να δοθεί η ακόλουθη άσκηση (η ανάλυση σε ερωτήματα είναι σκόπιμη).

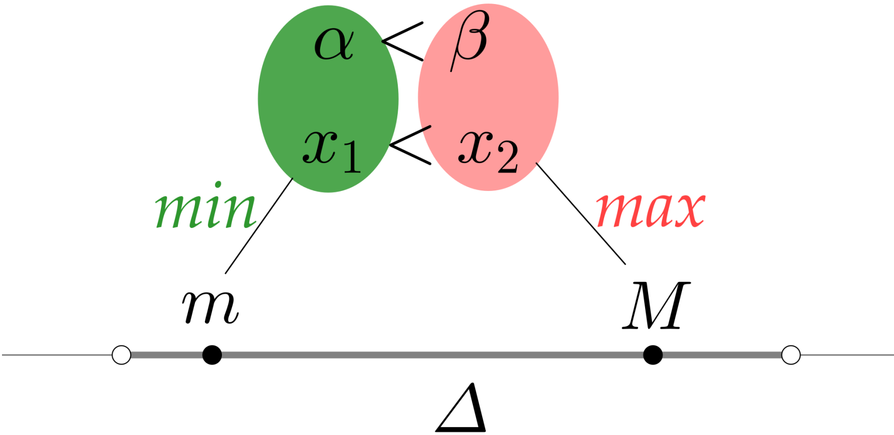
Έστω μια συνεχής 1-1 και συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

1. Έστω a και β δύο διάφοροι αριθμοί του Δ και p αριθμός μεταξύ των a, β. Να αποδείξετε ότι το $f(p)$ είναι μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$.
2. Έστω $[a, \beta]$ ένα κλειστό υποδιάστημα του Δ. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[a, \beta]$.
3. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Παράδειγμα 6: Επιστροφή 1η. Μετά την διδασκαλία της συνέχειας σε διάστημα.



Παράδειγμα 6: Επιστροφή 1η. Μετά την διδασκαλία της συνέχειας σε διάστημα.



Παράδειγμα 6: Επιστροφή 2η. Μετά την διδασκαλία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Να αποδειχθεί ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και η παράγωγος της δεν μηδενίζεται τότε είναι 1-1.

Παράδειγμα 6: Επιστροφή 3η. Μετά την διδασκαλία του θεωρήματος του Fermat.

1. Έστω $[a, \beta]$ ένα κλειστό υποδιάστημα του Δ. Να αποδειχθεί ότι:
   - Αν $f'(a) > 0$ και $f'(\beta) < 0$ υπάρχουν p, q στο (a, β) ώστε $f(a) < f(p)$ και $f(\beta) < f(q)$.
   - Αν $f'(a) < 0$ και $f'(\beta) > 0$ υπάρχουν p, q στο (a, β) ώστε $f(a) > f(p)$ και $f(\beta) > f(q)$.
2. (Ασθενής μορφή Θεωρήματος Darboux) Να αποδειχθεί ότι αν η f' παίρνει ετερόσημες τιμές στα a, β τότε μεταξύ των a, β υπάρχει ρίζα της f'.
3. Να αποδειχθεί ότι αν η f' δεν έχει ρίζα στο Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα 6: Επιστροφή 3η. Μετά την διδασκαλία του θεωρήματος του Fermat.

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) > 0$$

$$\lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = f'(\beta) < 0$$

$$\frac{f(p) - f(\alpha)}{\underbrace{p - \alpha}_{+}} > 0$$

$$\frac{f(q) - f(\beta)}{\underbrace{q - \beta}_{-}} < 0$$

$$f(p) > f(\alpha)$$

$$f(q) > f(\beta)$$

Τίτλοι τέλους.

www.nsmavrogiannis.gr/20191006.pdf

Τίτλοι τέλους.

Τίτλοι τέλους.

Σας Ευχαριστώ