3 ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

Τάξη Β'
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Ερωτήσεις Θεωρίας και απαντήσεις από το σχολικό βιβλίο

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

1. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά;**

Απάντηση: ‘Όταν έχουν τον ίδιο ή παράλληλους φορείς..

2. Τι ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$;**

Απάντηση: ‘Ενα διάνυσμα το οποίο

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.

3. Τι ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Απάντηση: Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in \mathbb{R}$.

4. Να αποδείξετε ότι για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB ισχύει $\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}}$

Απάντηση: Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

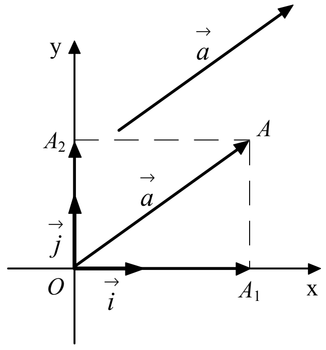
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM} .$$

Επομένως, $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Άρα $\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}}$

5. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Απάντηση: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \qquad (1)$$



Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται

$$\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το $\vec{\alpha}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.
Στην παραπάνω κατασκευή οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί. Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική. Πράγματι, έστω ότι ισχύει και

$$\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Τότε θα έχουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$, δηλαδή ότι $x - x' \neq 0$, τότε θα ισχύει

$$\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i} \,//\, \vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x = x'$, που συνεπάγεται ότι και $y = y'$.

6. Να αποδείξετε ότι $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ και $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Απάντηση: Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε έχουμε:

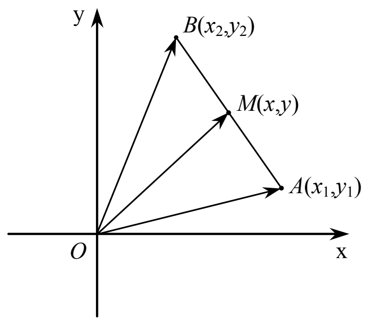
- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$
- $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$

7. Να αποδείξετε ότι αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB τότε $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Απάντηση: Επειδή $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, και

$\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$,
έχουμε

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



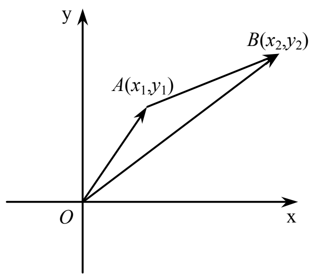
Επομένως ισχύει $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1.$$

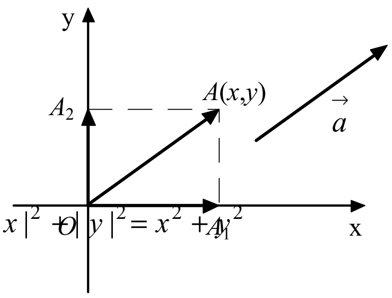
Απάντηση:
Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Επειδή, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ έχουμε:

$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



9. Να αποδείξετε ότι αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Απάντηση: Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(OA_1)=|x|$ και $(OA_2)=|y|$. Έτσι θα έχουμε:



$$|\vec{\alpha}|^2=(OA)^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2=(OA_1)^2+(OA_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$$

Επομένως: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

10. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Απάντηση: Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ τότε θα ισχύει $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

11. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως τότε $\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2}$

Απάντηση: Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2 .$$

Επομένως, $\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2}$

12. Τι ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Απάντηση: Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\varphi ,$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

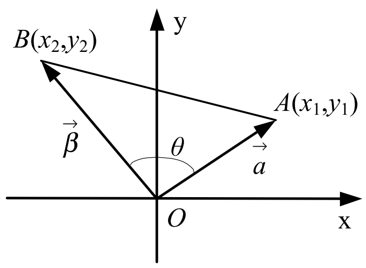
Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

13. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Απάντηση:

‘Εστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε την ισότητα

$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B ,$$



η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.
Όμως είναι

$$(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\ (OA)^2=x_1^2+y_1^2 \text{ και } (OB)^2=x_2^2+y_2^2.$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

και επειδή $(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε τελικά:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

14. Να αποδείξετε ότι:

1) $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\lambda\in\mathbf{R}$

2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

3) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\,//\,y'y)$

Απάντηση: Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

1) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα,

$$(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)$

$$=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)$$

$$=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.$$

3) $$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$

15. Να αποδείξετε ότι αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ τότε $\text{συν}\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Απάντηση: Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$ και επομένως, $\text{συν}\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

Είναι όμως

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2,\quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\quad\text{και}\quad|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

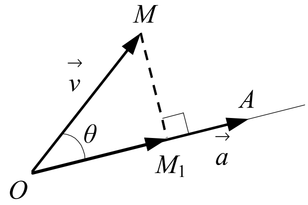
Επομένως,

$$\text{συν}\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

16. Να αποδείξετε ότι $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$

Απάντηση: Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.



Είναι

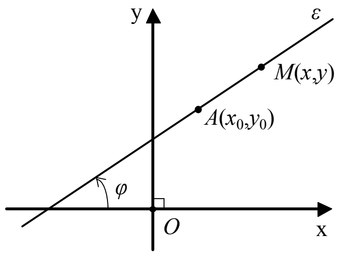
$$\overrightarrow{OM_1} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M} = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1} = \vec{\alpha}\cdot\ \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Απάντηση: Έστω ε η ευθεια που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.



Επομένως, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$ ή $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

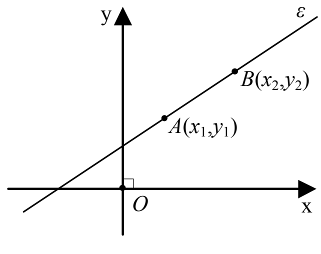
$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

18. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Απάντηση: Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γίνεται $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$



1. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0 \qquad (1)$$

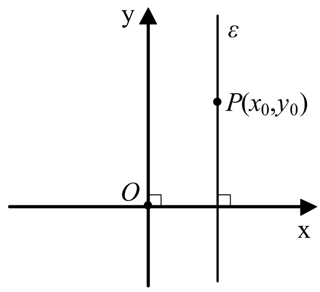
και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Απάντηση:

- ***Ευθύ***:

Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

— Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Sigma(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$



—Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0 .$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

- ***Αντίστροφού*:**

Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

— Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B = 0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

1. Να αποδείξετε ότι:

1) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

2) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Απάντηση:

1) Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$. Ξέρουμε ότι:

— Αν $B\neq 0$, τότε η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

— Αν $B = 0$, τότε η ε είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' και επομένως παράλληλη και πάλι προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

2) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$, αφού

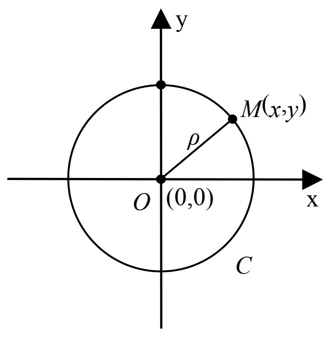
$$\vec{\delta} \cdot \vec{n} = (B, -A) \cdot (A, B) = AB - AB = 0 .$$

Επομένως αφού το $\vec{n}$ είναι κάθετο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ το $\vec{\delta}$ θα είναι παράλληλο στην ευθεία.

2. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Απάντηση: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM) = \rho \qquad (1)$$



Όμως, $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ ή, ισοδύναμα,

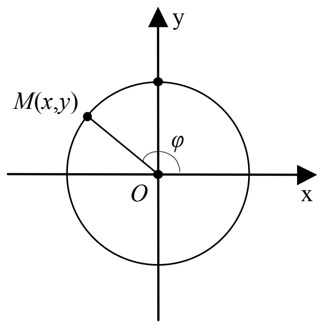
$$x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

3. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο $C: x^2+y^2=\rho^2$ αν και μόνο αν

$$x=\rho\,\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\rho\,\text{ημ}\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

Απάντηση: Έστω ο κύκλος $C: x^2+y^2=\rho^2$ και ένα σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου.



Αν το $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C και $\varphi\in[0,2\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με τον άξονα $x'x$, τότε, όπως γνωρίζουμε από την Τριγωνομετρία, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x=\rho\,\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\rho\,\text{ημ}\varphi. \qquad (1)$$

Αντιστρόφως, αν για τις συντεταγμένες x, y του M ισχύουν οι σχέσεις (1), τότε το σημείο M θα ανήκει στον κύκλο C, αφού

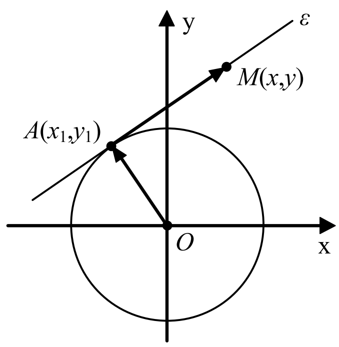
$$x^2+y^2=\rho^2\text{συν}^2\varphi+\rho^2\text{ημ}^2\varphi=\rho^2(\text{συν}^2\varphi+\text{ημ}^2\varphi)=\rho^2.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων $M(x,y)$ του κύκλου C και μόνον αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x=\rho\,\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\rho\,\text{ημ}\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

Απάντηση: Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$.



Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA\perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=0. \qquad (1)$$

Όμως $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$xx_1+yy_1=\rho^2, \qquad \text{αφού} \quad x_1^2+y_1^2=\rho^2.$$

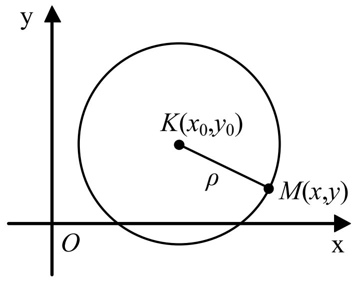
Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1+yy_1=\rho^2$$

5. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

Απάντηση: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει



$$(KM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.
Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$$ ή, ισοδύναμα,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 .$$

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \qquad (2)$$

2. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0\,, \quad \text{με} \quad A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad (\mathrm{I})$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο.

Απάντηση: Έστω κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ . Γνωρίζουμε ότι θα έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

Αν τώρα εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση (1) γράφεται

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0\,,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0\,, \qquad (\mathrm{I})$$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.
Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

1. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ που δεν διέρχεται από το Ε;

Απάντηση: Είναι ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την *Ε* και τη *δ*.

2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y^2=2px$

Απάντηση: Αν το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2=2px_1$, τότε και το σημείο $M_2(x_1,-y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού $(-y_1)^2=2px_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής..

3. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και *Ε*;

Απάντηση: Ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και *Ε* είναι *σταθερό* και μεγαλύτερο του $E'E$.

4. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E;

Απάντηση: Ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερή* και μικρότερη του $(E'E)$.

5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ έχει με την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $|\lambda|<\frac{\beta}{\alpha}$.

Απάντηση: Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και μια ευθεία ε με εξίσωση $y=\lambda x$, δηλαδή μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Η ευθεία ε έχει με την υπερβολή C κοινά σημεία, αν και μόνο αν το σύστημα

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad \text{και} \qquad y=\lambda x \qquad (1)$$

έχει λύση. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1), λόγω της δεύτερης, γράφεται διαδοχικά

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2x^2}{\beta^2}=1$$

$$\beta^2x^2-\lambda^2\alpha^2x^2=\alpha^2\beta^2$$

$$(\beta^2-\lambda^2\alpha^2)x^2=\alpha^2\beta^2. \qquad (2)$$

Έτσι το σύστημα (1) έχει λύση, αν και μόνο αν η (2) έχει λύση, δηλαδή αν και μόνο αν $\beta^2-\lambda^2\alpha^2>0$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|\lambda|<\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (3)$$

Επομένως, η ευθεία $y=\lambda x$ έχει με την υπερβολή κοινά σημεία, και μάλιστα δύο, μόνο όταν $|\lambda|<\frac{\beta}{\alpha}$.

6. Πότε λέμε ότι ο ακέραιος $\beta \neq 0$ διαιρεί τον ακέραιο α ;

Απάντηση: Οταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\alpha=\kappa\beta$.

7. Έστω α, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

(ii) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

(iii) Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

(iv) Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.

(v) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$, τότε $|\alpha|\leq|\beta|$.

Απάντηση:

(i) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\alpha=\lambda\beta$, οπότε $\alpha=\kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda=1$, που σημαίνει ότι $\kappa=\lambda=1$ ή $\kappa=\lambda=-1$, δηλαδή ότι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

(ii) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\beta$, οπότε $\gamma=\lambda\kappa\cdot\alpha$ και άρα $\alpha|\gamma$.

(iii) Επειδή $\alpha|\beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\beta=\kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta=\lambda\kappa\cdot\alpha$ και άρα $\alpha|\lambda\beta$.

(iv) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\alpha$, οπότε $\beta+\gamma=(\kappa+\lambda)\alpha$ και άρα $\alpha|(\beta+\gamma)$.

(v) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa\neq 0$ με $\beta=\kappa\alpha$. Επομένως, $|\beta|=|\kappa|\cdot|\alpha|\geq|\alpha|$, αφού $|\kappa|\geq 1$.

8. Έστω α και β δύο ακέραιοι, από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός.

Α) Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη των α και β;

Β) Πότε οι α, β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους;

Απάντηση: Α) Το μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Β) Όταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι 1.

9. Έστω δύο ακέραιοι α και β, διαφορετικοί από το μηδέν. Τι ονομάζουμε **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των α και β;

Απάντηση: Το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β.