Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

21 Ασκησεις στα Μαθηματικα Γενικης Παιδειας της Γ Ταξης

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

20 Μαΐου 2008

1. Αν για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,4$ να αποδείξετε ότι:

   (α′) $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

   (β′) Τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

   Απαντηση

   (α′) Ισχύει:
   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq_{(P(A \cup B) \geq 1)} P(A) + P(B) - 1 = 0,8 + 0,4 - 1 = 0,2$
   Επομένως $P(A \cap B) \geq 0,2$.
   Επίσης αφού $A \cap B \subseteq B$ θα είναι και $P(A \cap B) \leq P(B)$ επομένως $P(A \cap B) \leq 0,4$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι

   $$0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$$

   (β′) Αν τα A, B ήσαν ασυμβίβαστα θα είχαμε ότι $A \cap B = \emptyset$ και επομένως ότι $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, πράγμα αδύνατο αφού έχουμε ότι $P(A \cap B) \geq 0,2$. Άρα τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

2. Δίνεται η συνάρτηση

   $$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - x + 1}$$

   Να βρεθεί:

   (α′) Το πεδίο ορισμού της f

   (β′) Το όριο $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

   Απαντηση

(α′) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο πεδίο ορισμού της f πρέπει:

- $x+1 \geq 0$ δηλαδή $x \geq -1$
- $\sqrt{x+1}-x+1 \neq 0$. Βρίσκουμε για ποια x είναι $\sqrt{x+1}-x+1=0$. Έχουμε $\sqrt{x+1}-x+1=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}=x-1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x+1=x^2-2x+1$. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε τις ρίζες $x=0$, $x=3$. Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση $\sqrt{x+1}-x+1=0$ βλέπουμε ότι η $x=0$ απορρίπτεται ενώ η $x=3$ είναι δεκτή. Αρα θα πρέπει ο αριθμός 3 να εξαιρεθεί.

Συνοψίζοντας βλέπουμε όυι το πεδίο ορισμού απαρτίζεται από τους αριθμους x με $x \geq -1$ και $x \neq 3$. Δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το $[-1,3) \cup (3,+\infty)$

(β′) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-x+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{3x-x^2} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{3x-x^2} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{-x(x-3)} =$
$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{-x} = -\frac{4}{3}$

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με τύπο

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Απαντηση

Έστω $y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη. Θα είναι $\alpha = f'(1)$. Παραγωγίζουμε την f και βρίσκουμε ότι $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$. Επομένως

$$\alpha = f'(1) = \frac{1}{e}$$

Επειδή η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ θα διέρχεται από το $A(1, f(1))$ η εξίσωαη της θα επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου άρα θα ισχύει $f(1) = \alpha \cdot 1 + \beta$. Βρίσκουμε ότι $f(1) = \frac{1}{e}$ και επομένως $\frac{1}{e} = \frac{1}{e} + \beta$ άρα:

$$\beta = 0$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι η

$$y = \frac{1}{e}x$$

4. Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους $10m$ του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $v = 2\frac{m}{\sec}$ και η θέση του στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση

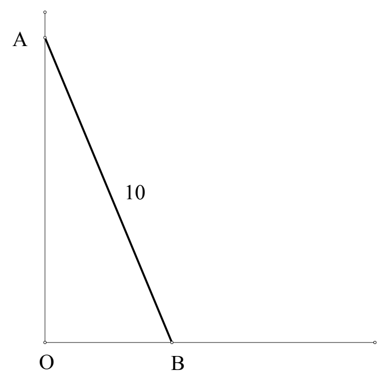
$$S(t) = vt, \quad t \in [0,5]$$

όπου t ο χρόνος σε sec.

(α′) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t.

(β′) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του OA είναι $6m$;

Απαντηση



(α′) Η θέση δηλαδή η τετμημένη του B είναι $2t$, $0 \leq t \leq 5$. Επομένως $OA = 2t$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB έχουμε: $OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow OA^2 + (2t)^2 = 10^2 \Rightarrow OA^2 = 100 - 4t^2$. Άρα $OA = \sqrt{100 - 4t^2}$ με $0 \leq t \leq 5$ και για το εμβαδόν του OAB έχουμε ότι $(OAB) = \frac{1}{2}(2t)\sqrt{100 - 4t^2}$ δηλαδή:

$$(OAB) = E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 5$$

(β′) Παραγωγίζοντας την $E(t)$ βρίσκουμε:

$$E'(t) = 2\frac{2t^2 - 25}{\sqrt{(25 - t^2)}}$$

Όταν $OA = 6$ θα είναι $\sqrt{100 - 4t^2} = 6$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή και λαμβάνοντας υπ'οψιν ότι πρέπει $t > 0$ βρίσκουμε ότι $t = 4$. Αντικαθιστόύμε την τιμή αυτή του t στο $E'(t)$ και βρίσκουμε: $E'(4) = -\frac{14}{3}$

5. Αν

$$f(x) = ae^{\nu x} + \beta \cdot e^{-\nu x}$$

να αποδειχθεί ότι

$$f''(x) = \nu^2 f(x)$$

Απαντηση

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε $f'(x) = \nu\left(ae^{2\nu x} - \beta\right)e^{-\nu x}$ και $f''(x) = \nu^2\left(ae^{2\nu x} + \beta\right)e^{-\nu x} = \nu^2\left(ae^{\nu x} + \beta \cdot e^{-\nu x}\right) = \nu^2 f(x)$

6. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$

(β′) $f(x) = \eta\mu^3(\ln x)$

(γ′) $f(x) = 2^x \cdot \ln x$

(δ′) $f(x) = 10^{10^x}$

Απαντηση

(α′) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu\eta\mu x$

(β′) $f'(x) = 3\frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} - 3\frac{\sigma\upsilon\nu^3(\ln x)}{x}$

(γ′) $f'(x) = 2^x \ln 2 \ln x + \frac{2^x}{x}$

(δ′) $f'(x) = 10^{10^x+x}(\ln 2 + \ln 5)^2$

7. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ώστε:

$$|2P(A) + 1| + |P(A) - 3| = 4\lambda$$

και

$$P(B) = 1 - \ln(\kappa + 1)$$

όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}^*$

(α′) Να υπολογιστούν οι αριθμοί κ, λ.

(β′) Να βρεθούν τα $P(A)$, $P(B)$.

Απαντηση

(α′) i. **Εύρεση του** λ. Αφού $0 \leq P(A) \leq 1$ θα είναι $2P(A) + 1 > 0$, $P(A) - 3 < 0$ επομένως η σχέση $|2P(A) + 1| + |P(A) - 3| = 4\lambda$ γράφεται $(2P(A) + 1) - (P(A) - 3) = 4\lambda$ από την οποία βρίσκουμε $3P(A) - 2 = 4\lambda$ και επομένως $P(A) = -4 + 4\lambda$. Πρέπει $0 \leq P(A) \leq 1$ άρα πρέπει $0 \leq -4 + 4\lambda \leq 1$. Λύνοντας την ανίσωση $-4+4\lambda \geq 0$ βρίσκουμε ότι $1 \leq \lambda$ και λύνοντας την $-4+4\lambda \leq 1$ βρίσκουμε ότι $\lambda \leq \frac{5}{4}$. Δηλαδή $1 \leq \lambda \leq \frac{5}{4}$ και αφού ο λ παίρνει ακέραιες τιμές θα είναι $\lambda = 1$.

ii. **Εύρεση του** κ. Πρέπει $0 \leq P(B) \leq 1$. Επομένως πρέπει $0 \leq 1 - \ln(\kappa + 1) \leq 1$. Λύνουμε την $0 \leq 1 - \ln(\kappa + 1)$ και βρίσκουμε $\kappa \leq e - 1$ ενώ από την επίλυση της $1 - \ln(\kappa + 1) \leq 1$ βρίσκουμε $0 \leq \kappa$. Άρα πρέπει $0 \leq \kappa \leq e - 1$. Επειδή ο κ είναι θετικός ακέραιος και $e = 2,7$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 1$.

(β′) Από την ισότητα $P(A) = -4 + 4\lambda$ και αφού $\lambda = 1$ έχουμε ότι $P(A) = 0$. Από την ισότητα $P(B) = 1 - \ln(\kappa + 1)$ και αφού $\kappa = 1$ θα είναι $P(B) = 1 - \ln 2$.

8. Μια βιομηχανία κάνει συσκευασία γάλακτος σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά: $10\%, 20\%, 30\%\ 40\%$ με αντίστοιχο κόστος συσκευασίας $8, 6, 4, 2$ δρχ ανά κουτί.

(α′) Να βρεθεί το μέσο κόστος συσκευασίας και η τυπική απόκλιση του κόστους αυτού.

(β′) Αν το κόστος κάθε συσκευασίας αυξηθεί κατά 10% να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση του κόστους συσκευασίας.

Απαντηση

(α′) Από τις συχνότητες επί τοις % βρίσκουμε ότι οι σχετικές συχνότητες είναι $0,1,\ \ 0,2,\ \ 0,3,\ \ 0,4$. Από την σχέση $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i f_i$ βρίσκουμε ότι $\bar{x} = 0,1 \cdot 8 + 0,2 \cdot 6 + 0,3 \cdot 4 + 0,4 \cdot 2 = 4$.
Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i$$

από τον οποίο έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \frac{\nu_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + \nu_k (x_k - \bar{x})^2}{\nu} =$$

$$= \frac{\nu_1 (x_1 - \bar{x})^2}{\nu} + \cdots + \frac{\nu_k (x_k - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu} (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + \frac{\nu_k}{\nu} (x_k - \bar{x})^2 =$$

$$= f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + f_k (x_k - \bar{x})^2$$

Άρα $s^2 = 0,1 \cdot (8-4)^2 + 0,2 \cdot (6-4)^2 + 0,3 \cdot (4-4)^2 + 0,4 \cdot (2-4)^2 = 4$.
Επομένως $s = 2$.

(β′) Κάθε τιμή αυξάνεται κατά 10% επομένως πολλαπλασιάζεται επί 1,1. Άρα και η τυπική απόκλιση θα πολλαπλασιασθεί επί 1,1 και θα γίνει 2, 2.

9. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

(α′) Έστω A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, τότε:

$$P(A - B) + P(B) = P(B - A) + P(A)$$

(β′) Έστω A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, τότε:

$$P(A \cup B) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

(γ′) Έστω A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, με: $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,7$ και $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,6$ τότε τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

(δ′) Αν ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα τότε

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) > \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

(ε′) Το βέβαιο ενδεχόμενο και το αδύνατο ενδεχόμενο είναι αντίθετα ενδεχόμενα

Απαντηση

Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

10. Αν

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}+1$$

να υπολογιστούν τα όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+4)-f(4)}{x}$

(β′) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x^2+2x}$

Απαντηση

(α′) Έχουμε $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{\sqrt{x+4}^2-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{(x+4)}+2}$και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+4)}+2}=\frac{1}{4}$.

(β′) Ισχύει $\frac{f(x+1)-f(1)}{x^2+2x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x^2+2x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{\sqrt{x+1}^2-1}{(x^2+2x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x(x+2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{(x+1)}+1\right)}$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{(x+1)}+1\right)}=\frac{1}{2}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=1+x^2\cdot e^{-x},x\in\mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0=1$.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

(γ′) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

Απαντηση

(α′) Παραγωγίζουμε την συναρτηση και βρίκουμε ότι $f'\left(x\right)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$. Αντικαθιστούμε στην θέση του x το 1 και βρίσκουμε $f'\left(1\right)=e^{-1}$.

(β′) Για την ζητούμενη εφαπτομένη $y=\alpha x+\beta$ έχουμε

- $\alpha=f'\left(1\right)=e^{-1}$
- $\beta=f\left(1\right)-\alpha\cdot 1=f\left(1\right)-f'\left(1\right)\cdot 1=1$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y=\frac{1}{e}x+1$.

(γ′) Είναι $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2xe^{-x}-x^2e^{-x}>0\Leftrightarrow -xe^{-x}\left(-2+x\right)>0\Leftrightarrow\left(x-2\right)x<0\Leftrightarrow 0<x<2$. Επομένως η συνάρτηση είναι

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

12. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=2e^{x^2-4x+5}+3$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=4\left(-2+x\right)e^{x^2-4x+5}$ και εύκολα βρίσκουμε ότι στο διάστημα $(-\infty,2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο για $x=2$ το $f\left(2\right)=2e+3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

   (α′) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

   (β′) Έστω δύο διαφορετικά σημεία $M(\alpha, f(\alpha))$ και $N(\beta, f(\beta))$ της $\mathcal{C}_f$. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία AB διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα ισχύει $a^{\beta^2} = \beta^{\alpha^2}$.

Απαντηση

(α′) Με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$θα είναι μία ευθεία της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με:

- $\alpha = f'(x_0) = \frac{1-\ln x_0}{x_0^2}$
- $\beta = f(x_0) - \alpha x_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 = \frac{2\ln x_0 - 1}{x_0}$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = \frac{1-\ln x_0}{x_0^2}x + \frac{2\ln x_0 - 1}{x_0}$

(β′) Έστω $y = \kappa x + \lambda$ η ευθεία AB. Αφού διέρχεται από τα O, A, B οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωση της δηλαδή:

i. $0 = \kappa 0 + \lambda$

ii. $f(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda$

iii. $f(\beta) = \kappa\beta + \lambda$

Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι $\lambda = 0$ και από τις επόμενες δύο έχουμε ότι $\kappa = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\kappa = \frac{f(\beta)}{\beta}$. Επομένως $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$ δηλαδή $\frac{\ln\alpha}{\alpha^2} = \frac{\ln\beta}{\beta^2}$. Άρα $\beta^2\ln\alpha = \alpha^2\ln\beta$ και επομένως $\ln\alpha^{\beta^2} = \ln\beta^{\alpha^2}$ από την οποία προκύπτει ότι $\alpha^{\beta^2} = \beta^{\alpha^2}$.

14. Ένα δείγμα αποτελείται από 5 αριθμούς. Οι 4 από αυτούς είναι οι 1, 2, 3, 4. Πως πρέπει να επιλεγεί ο 5ος ώστε το δείγμα να παρουσιάζει την μικρότερη δυνατή τυπική απόκλιση;

Απαντηση

Έστω x ο 5ος αριθμός. Θα είναι $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+x}{5} = 2 + \frac{1}{5}x$. Η διασπορά του δείγματος θα είναι
$s^2 = \frac{\left(1-\left(2+\frac{1}{5}x\right)\right)^2 + \left(2-\left(2+\frac{1}{5}x\right)\right)^2 + \left(3-\left(2+\frac{1}{5}x\right)\right)^2 + \left(4-\left(2+\frac{1}{5}x\right)\right)^2 + \left(5-\left(2+\frac{1}{5}x\right)\right)^2}{5} = 3 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}x^2$. Προφανώς η τυπική απόκλιση είναι ελάχιστη αν και μόνο αν η διασπορά είναι ελάχιστη, δηλαδή όταν η $f(x) = 3 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}x^2$ γίνει ελάχιστη. Είναι $f'(x) = -\frac{2}{5} + \frac{2}{25}x$ και εύκολα βρίσκουμε ότι η f γίνεται ελάχιστη όταν $x = 5$.

15. Να αποδείξετε ότι για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P^2(A)P(A') \leq \frac{4}{27}$

Απαντηση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2(1-x)$. Μελετούμε την f ως προς τη μονοτονία: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$. Επομένως η f στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[\frac{2}{3}, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως στο διάστημα $[0, +\infty)$ η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{2}{3}$. Άρα για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει

$$f(x) \leq f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

Αν όπου x θέσουμε $P(A)$ βρίσκουμε ότι $P^2(A)(1 - P(A)) \leq \frac{4}{27}$ και επομένως $P^2(A)P(A') \leq \frac{4}{27}$

16. Έστω f μία γνησίως αυξουσα συνάρτηση. Να βρεθεί ό t αν ισχύει ότι $f\left(t^2 - t\right) \leq f(t-1)$.

Απαντηση

Αν ήταν $t^2 - t > t - 1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα ήταν και $f\left(t^2 - t\right) > f(t-1)$ πράγμα αδύνατο. Άρα θα είναι $t^2 - t \leq t - 1$. Αλλά $t^2 - t \leq t - 1 \Leftrightarrow t^2 - t - t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0$. Άρα από την υπόθεση έχουμε ότι

$$(t-1)^2 \leq 0$$

Αλλά ξέρουμε ότι το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικό δηλαδή ότι: $(t-1)^2 \geq 0$ Επομένως δε μπορεί παρά να είναι $(t-1)^2 = 0$ και επομένως $t = 1$.

17. Κατά μία μέτρηση του αναστήματος των 10 αθλητών βρέθηκε ότι η μέση τιμή του ήταν 1,71. Ωστόσο στη συνέχεια βρέθηκε ότι οι υπολογισμοί έγιναν με μία λάθος τιμή: Αντί του πραγματικού αναστήματος 1,87 ενός αθλητή είχε δοθέι η τιμή 1,78. Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή του αναστήματος;

Απαντηση

Ας ονομάσουμε Σ το άθροισμα των αναστημάτων όλων των αθλητών εκτός εκείνου που έγινε το λάθος. Θα είναι

$$\frac{\Sigma + 1,78}{10} = 1,71$$

Λύνοντας ως προς Σ βρίσκουμε $\Sigma = 15,32$. Η πραγματική μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma + 1,87}{10}$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι αυτή είναι $1,719$.

18. Στην παρακάτω κατανομή

$[2,3)$	5
$[3,4)$	6
$[4,5)$	x
$[6,7)$	10

η διάμεσος είναι $\frac{40}{9}$. Να βρεθεί το x.

Απαντηση

Αφού η διάμεσος είναι $\frac{40}{9} = 4,4$ θα βρίσκεται στην κλάση $[4,5)$. Επειδή ως την διάμεσο πρέπει να έχουμε το μισό του πληθυσμού δηλαδή $\frac{21+x}{2}$ και οι δύο πρώτες κλάσεις έχουν 11 στοιχεία θα χρειασθεί να πάρουμε $\frac{21+x}{2} - 11 = \frac{x-1}{2}$ στοιχεία της κλάσης $[4,5)$ δηλαδή το $\frac{\frac{x-1}{2}}{x} = \frac{x-1}{2x}$ της κλάσης. Επομένως θα πάρουμε και το $\frac{x-1}{2x}$ του πλάτους της κλάσης δηλαδή το $\frac{x-1}{2x} \cdot 1 = \frac{x-1}{2x}$. Άρα η διάμεσος θα είναι ίση με $4 + \frac{x-1}{2x}$. Εχουμε την εξίσωση

$$4 + \frac{x-1}{2x} = \frac{40}{9}$$

Λύνοντας βρίσκουμε $x = 9$.

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

(α') Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της στο σημείο της $A(1,0)$.

(γ') Έστω δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B$ τότε ισχύει $f\left(P\left(A\right)\right) \subseteq f\left(P\left(B\right)\right)$.

Απαντηση

(α') Η f έχει πεδίο ορισμού $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ και η παράγωγος της είναι

$$f'\left(x\right) = \frac{x^2 + 4x + 1}{\left(x+2\right)^2}$$

Έχουμε:

$$f'\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < -2 - \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad -2 + \sqrt{3} < x$$

Επομένως η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $\left[-2 - \sqrt{3}, 2\right)$
- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-2, -2 + \sqrt{3}\right]$
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$

(β') Είναι $f\left(1\right) = 0$ και $f'\left(1\right) = \frac{2}{3}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f θα είναι μία ευθεία της μορφής $y = \alpha x + \beta$ που:

- Θα διέρχεται από το A
- Θα έχει $\alpha = f'\left(1\right)$

Επομένως θα είναι $\alpha = \frac{2}{3}$ και $0 = \alpha \cdot 1 + \beta$ αρα $\beta = -\frac{2}{3}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι η $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

(γ') Γνωρίζουμε ότι αφού είναι $A \subseteq B$ θα ισχύει $P\left(A\right) \subseteq P\left(B\right)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι τιμές $P\left(A\right), P\left(B\right)$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$ επομένως ανήκουν στο διάστημα $\left[-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα θα ισχύει $f\left(P\left(A\right)\right) \subseteq f\left(P\left(B\right)\right)$.

20. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-\alpha} = -1$ βρείτε το α.

Απαντηση

Έστω $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$ με $x \neq \alpha$. Θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$. Τότε για κάθε $x \neq \alpha$ θα ισχύει

$$x^2-3x+2 = (x-\alpha) f(x)$$

Παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών για $x \to 1$ βρίσκουμε $0 = (1-\alpha)(-1)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 1$.

21. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μίας κατανομής:

x_i	f_i
2	0,4
8	u
10	v
16	0,2

(α′) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 4 + 8u + 10v$.

(β′) Να εκφράσετε την διασπορά ως συνάρτηση του u.

(γ′) Αν η διασπορά είναι ίση με $27,24$ να βρείτε τα u, v.

Απαντηση

(α′) $\bar{x} = 0,4 \cdot 2 + u \cdot 8 + v \cdot 10 + 0,2 \cdot 16 = 4 + 8u + 10v$

(β′) Αφού $0,6 + u + v = 1$ θα είναι $v = 0,4 - u$ και επομένως $\bar{x} = 8 - 2u$. Εργαζόμενοι όπως στην άσκηση βρίσκουμε ότι

$$s^2 = f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + f_k (x_k - \bar{x})^2$$

και επομένως στην περίπτωση μας θα έχουμε:

$$s^2 = 0,4 \cdot (2-(8-2u))^2 + u \cdot (8-(8-2u))^2 +$$

$$= (0,4-u)\cdot(10-(8-2u))^2 + 0,2\cdot(16-(8-2u))^2 = 28,8 - 4u - 4u^2$$

(γ′) Λύνουμε την εξίσωση $28,8 - 4u - 4u^2 = 27,24$ και βρίσκουμε μία μόνο θετική ρίζα την $u = 0,3$. Από την σχέση $v = 0,4 - u$ βρίσκουμε ότι $v = 0,1$