ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

της

ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

ΤΑΞΗ Γ΄

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

78 Ερωτήσεις Θεωρίας

σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006

78 Ερωτήσεις Θεωρίας
Στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1.

Τι ονομάζουμε συνάρτηση;
Τι ονομάζουμε παραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (πεδίο ορισμού) αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.
Μία συνάρτηση της οποίας το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *B* συμπίπτει με το *R*.

2.

Τι λέγεται τιμή μίας συνάρτησης f στο x;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ο αριθμός $y = f(x)$ στον οποίο αντιστοιχίζεται το $x \in A$.

3.

Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*. Τι ονομάζεται εξαρτημένη και τι ανεξάρτητη μεταβλητή της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *A*, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το $y = f(x)$, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

4.

'Εστω οι συναρτήσεις *f*, *g* που ορίζονται σε ένα σύνολο *A*. Πως ορίζονται
I. Το άθροισμα $S = f + g$;
II. Η διαφορά $D = f - g$;
III. Το γινόμενο $P = f \cdot g$
IV. Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
I. $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
II. $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
III. $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$
IV. $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.;

5.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

6.

Πότε ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης *f*;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν $y = f(x)$.

7.

Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f*;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η εξίσωση $y = f(x)$.

8.

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γνησίως αύξουσα: όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
Γνησίως φθίνουσα όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

9.

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 'Οταν είναι γνησίως αύξουσα στο *Δ* ή όταν είναι ή γνησίως φθίνουσα στο *Δ*.

10.

Τι ονομάζουμε περιοχή του x_1;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Κάθε ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1.

11.

I. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το *A* λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;
II. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το *A* λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $x_2 \in A$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
I. Όταν ισχύει $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_1,
II. Όταν ισχύει $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_2.

12.

Τι ονομάζονται ακρότατα μίας συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συνάρτησης (τοπικά ή ολικά).

13.

Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί ποια είναι τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^\nu$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\ell_1 + \ell_2$, $k\ell_1$, $\ell_1\ell_2$, $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, ℓ_1^ν, $\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

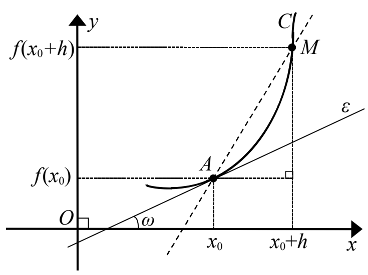
14.

Πότε μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *A* λέγεται συνεχής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

15.

Έστω *f* μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης *C*. Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της *C* στο *A*;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\varepsilon\varphi\omega = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$



16.

Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Το όριο $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

17.

Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0.

18.

Τι ονομάζεται παράγωγος μια συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 'Εστω B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Παράγωγος της f ονομάζεται η συνάρτηση f' με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

19.

Τι ονομάζεται δεύτερη παράγωγος μια συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος $f'' = (f')'$ της συνάρτησης f'.

20.

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι 0 δηλαδή ότι $(c)' = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$,

οπότε $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

21.

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι 1 δηλαδή ότι $(x)' = 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$. Επομένως

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$.

Άρα $(x)' = 1$.

22.

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $2x$ δηλαδή ότι $(x^2)' = 2x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(2x+h)h}{h} = 2x + h$. Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Άρα $(x^2)' = 2x$.

23.

Να αποδείξετε ότι

I. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$

II. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{-2}{x^3}$

III. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε

I. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$,

II. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

III. $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

24.

Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $ημx$, $συνx$, e^x, $\ln x$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ισχύει $(ημx)' = συνx$, $(συνx)' = -ημx$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

25.

Να αποδείξετε ότι $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Επομένως

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x)$.

Άρα $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.

26.

Να αποδείξετε ότι $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $F(x) = f(x)+g(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x) = (f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x)) = (f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x))$,

και για $h\neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

27.

Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ισχύει

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

28.

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $Δ$ και ισχύει $f'(x) > 0$ (αντιστοίχως $f'(x) < 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο του $Δ$ τι συμπέραίνουμε για την μονοτονία της στο $Δ$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο $Δ$.

29.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν

$f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β)

(αντιστοίχως $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β))

το συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α,β);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) μέγιστο για $x=x_0$ (αντιστοίχως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$)

30.

Τι ονομάζεται στη στατιστική πληθυσμός, δείγμα, και πότε ένα δείγμα θα ονομάζεται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πληθυσμός λέγεται ένα σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Δείγμα ονομάζεται μία μικρή ομάδα- υποσύνολο του πληθυσμού. 'Ενα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

31.

Τι ονομάζονται στη στατιστική μεταβλητές και τι τιμές μίας μεταβλητής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μεταβλητές λέγονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται τιμές της μεταβλητής.

32.

Πως διακρίνονται οι μεταβλητές ως προς τις τιμές τους;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

I. Σε ποιοτικές ή κατηγορικές των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.
II. Σε ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
   i) Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.
   ii) Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

33.

Ποια είναι τα είδη συχνοτήτων μίας μεταβλητής και πως ορίζονται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

<u>Συχνότητες (για όλα τα είδη μεταβλητών):</u> Αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Τότε

Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής x_i είναι ο αριθμός ν_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Η σχετική συχνότητα της τιμής x_i είναι ο αριθμός $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$,

Η σχετική συχνότητα % της τιμής x_i είναι ο αριθμός $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 f_i$.

<u>Αθροιστικές συχνότητες (μόνο για ποσοτικές μεταβλητές):</u>

Η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι ο αριθμός N_i που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i. Αν οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$.

Η αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής x_i είναι ο αριθμός F_i που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i σε σχέση με το ν. Αν οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η σχετική αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$

Η αθροιστική σχετική συχνότητα % της τιμής x_i είναι ο αριθμός $F_i\%$ που εκφράζει το ποσοστο των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής. Αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η σχετική αθροιστική συχνότητα % της τιμής x_i είναι $F_i\% = f_1\% + f_2\% + ... + f_i\% = 100F_i$

34.

I. Με τι είναι ίσο το άθροισμα $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa$;

II. Με τι είναι ίση η διαφορά $N_\kappa - N_{\kappa-1}$;

III. Με τι είναι ίση η διαφορά $F_\kappa - F_{\kappa-1}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Με ν , ν_κ , f_κ

35.

Να αποδείξετε ότι για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,...,\kappa$

II. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

I. Αφού $0 \le \nu_i \le \nu$ θα είναι $\frac{0}{\nu} \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu}$ δηλαδή $0 \le f_i \le 1$.

II. Ισχύει $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

36.

Τι ονομάζεται κατανομή συχνοτήτων μίας μεταβλητής με τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Υπάρχουν 3 είδη κατανομών συχνοτήτων

Πρόκειται για :

-το σύνολο των ζευγών (x_i, ν_i) - το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) - το σύνολο των ζευγών $(x_i, f_i\%)$

και άλλα 3 αν η μεταβλητή είναι ποσοτική:

-το σύνολο των ζευγών (x_i, N_i) - το σύνολο των ζευγών (x_i, F_i) - το σύνολο των ζευγών $(x_i, F_i\%)$

37.

Πότε χρησιμοποιείται το ραβδόγραμμα; Να δώσετε μία περιγραφή του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα.

38.

Πότε χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων; Να δώσετε μία περιγραφή του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια μία κάθετη γραμμή της οποίας το με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα.

39.

Πότε χρησιμοποιείται το πολύγωνο συχνοτήτων; Να δώσετε μία περιγραφή του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρησιμοποιείται όταν έχουμε ποσοτικές μεταβλητές. Προκύπτει από το διάγραμμα συχνοτήτων ενώνοντας (κατά περίπτωση) τα σημεία (x_i, ν_i) ή (x_i, f_i) ή $(x_i, f_i\%)$

40.

Πότε χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα; Να δώσετε μία περιγραφή του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

41.

Με τι είναι ίσο το τόξο α_i ενός κυκλικού που αντιστοιχεί στην τιμή x_i;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι $\alpha_i = v_i \dfrac{360^o}{v} = 360^o f_i$ για $i=1,2,...,\kappa$.

42.

Τι είναι το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι το διάγραμμα μίας μεταβλητής που οι τιμές που παίρνει είναι χρονικές στιγμές.

43.

Τι είναι οι κλάσεις και τα όρια των κλάσεων; Τι είναι η κεντρική τιμή, το πλάτος και η συχνότητα μίας κλάσης ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής μορφής $[\alpha,\beta)$ στα οποία ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) τα δεδομένα. Όρια των κλάσεων είναι τα άκρα α , β των διαστημάτων αυτών. Κεντρική τιμή της κλάσης $[\alpha,\beta)$ είναι το κέντρο της $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και πλάτος της είναι ο αριθμός $\beta-\alpha$. Συχνότητα της κλάσης $[\alpha,\beta)$ ονομάζεται το πλήθος των παρατηρήσεων που προκύπτουν από τη διαλογή για την αυτή.

44.

Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων; Πως κατασκευάζεται; Τι είναι το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα. Κατασκευάζεται ως εξής: Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, σχηματίζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.
Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων προκύπτει από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων αν θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων.

45.

Ποια είναι η αριθμητική τιμή του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν έχουμε διάγραμμα απολύτων συχνοτήτων το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το μέγεθος v του δείγματος. Αν έχουμε διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν αυτό είναι 1 ενώ αν έχουμε διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων % το εμβαδόν αυτό είναι 100.

46.

Πως ορίζεται η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής X;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους v οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, ..., t_v$, τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_v}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{v} t_i}{v} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_i$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_\kappa v_\kappa}{v_1 + v_2 + ... + v_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i$$

όπου $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X και $v_1, v_2, ..., v_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες.

47.

Πως εκφράζεται η μέση τιμή από τις τιμές μίας μεταβλητής και τις σχετικές συχνότητες τους;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

48.

Τι ονομάζουμε σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο των τιμών $x_1, x_2, ..., x_v$ με συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_v$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Τον αριθμό $\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_v w_v}{w_1 + w_2 + ... + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{v} w_i}$.

49.

Τι ονομάζεται διάμεσος (δ) ενός δείγματος v παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η μεσαία παρατήρηση, όταν το v είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το v είναι άρτιος αριθμός.

50.

Τι ονομάζεται εύρος μίας κατανομής
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ονομάζεται ο αριθμός

$$R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση-Μικρότερη παρατήρηση}$$

51.

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i - \bar{x})}{v}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ισχύει

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

52.

Τι ονομάζεται διακύμανση ή διασπορά μίας κατανομής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ο αριθμός s^2 όπου

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i - \bar{x})^2$$

ή ισοδύναμα (όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα):

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 v_i$$

53.

Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση μίας κατανομής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ο αριθμός s που δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{s^2}$$

54.

Αν η μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s να αναφέρετε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκεται
i) στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$
ii) στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$
iii) στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 68% , 95% και 99,7% .

55.

Ποιο είναι κατά προσέγγισιν το εύρος μίας κανονικής κατανομής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι περίπου έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

56.

Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας CV ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι $CV = \dfrac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

57.

Πως συγκρίνεται η ομοιογένεια δύο δειγμάτων A, B;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής των A, B. Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει εκείνο το δείγμα με μικρότερο συντελεστή μεταβολή.
Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

58.

Πότε ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

59.

Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πείραμα τύχης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι το σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ των δυνατών αποτελεσμάτων $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu$ του πειράματος.

60.

Τι λέγεται ενδεχόμενο ενός πείραμα τύχης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$.

61.

Τι λέγεται απλό και τι σύνθετο ενδεχόμενο ενός πείραμα τύχης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και σύνθετο αν έχει περισσότερα στοιχεία.

62.

Πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο Α ενός πειράματος τύχης πραγματοποιείται ή συμβαίνει σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του πειράματος;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε αυτή την εκτέλεσή είναι στοιχείο του ενδεχομένου Α.

63.

Τι ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή ενός ενδεχομένου;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι τα στοιχεία του ενδεχομένου.

64.

Ποιο είναι το βέβαιο και ποιο το αδύνατο ενδεχόμενο
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι αντιστοίχως το Ω και το $\varnothing$.

65.

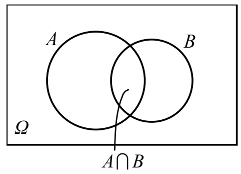
Αν A είναι ένα ενδεχόμενο τι συμβολίζει το $N(A)$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το πλήθος των στοιχείων του A;

66.

Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cap B$; Να παραστήσετε το $A \cap B$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

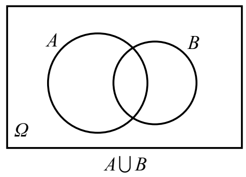
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.



67.

Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$; Να παραστήσετε το $A \cap B$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

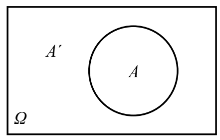
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.



68.

Πότε πραγματοποιείται το αντίθετο ενδεχόμενο A' του A; Να παραστήσετε το A' σε ένα διάγραμμα του Venn.;

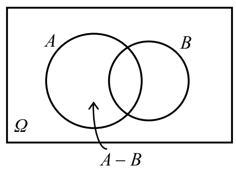
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν δεν πραγματοποιείται το A.



69.

Πότε πραγματοποιείται η διαφορά $A - B$ του B από το A; Να παραστήσετε το $A - B$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν πραγματοποιείται, το A αλλά όχι το B.



70.

Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν $A \cap B = \varnothing$.

71.

Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

72.

Πως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=1,\ 0 \le P(A) \le 1$;

1. $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$

2. $P(\varnothing) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

73.

Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

74.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος:

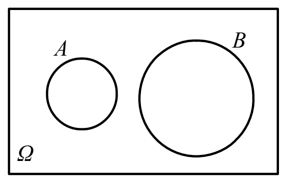
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$



$A \cup B$

75.

Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

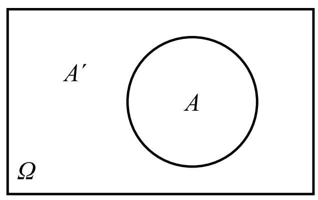
$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$
$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



76.

Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ο προσθετικός νόμος:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

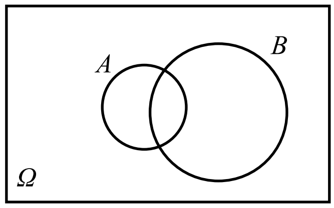
αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



$A \cup B$

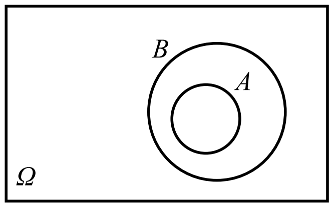
77.

Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \le N(B), \ \frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}, \ P(A) \le P(B).$$



78.

Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $\quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$