9 Ασκήσεις στις Εφαπτομένες

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

18 Ιανουαρίου 2008

Ασκηση 1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με τετμημένη e.

Λυση

Η εξίσωση της τυχούσας εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ είναι

$$y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$$

Εδώ $x_0 = e$ και $f(x_0) = e + \ln e = e + 1$. Επίσης $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και επομένως $f'(x_0) = f'(e) = 1 + \frac{1}{e}$. Αντικαθιστούμε στη σχέση

$$y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - x_0$$

βρίσκουμε ότι η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$y = \frac{e+1}{e} x$$

Η εξίσωση της γραφικής της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $P(x_0, f(x_0)$ είναι:
$\boxed{y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0}$
ή αλλιώς
$\boxed{y = \alpha x + \beta}$
με:
$\boxed{\alpha = f'(x_0)}$
$\boxed{f(x_0) = \alpha x_0 + \beta}$

Ασκηση 2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 1$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ οι οποίες είναι παράλληλες στον $x'x$.

Λυση

Θα πρέπει να βρούμε τα $x_0 \in \mathcal{D}_f$ για τα οποία είναι $f'(x_0) = 0$. Εδώ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 1$. Επομένως τα x_0 που ψάχνουμε θα είναι λύσεις της εξίσωσης $3x_0^2 - 1 = 0$. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε ότι είναι $x_0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ και $x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Επειδή θα είναι $f'(x_0) = 0$ η εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτά τα x_0 είναι $y = f(x_0)$ πράγμα αναμενόμενο διότι μία ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ θα έχει εξίσωση της μορφής

$$y = f(\text{τετμημένης αυτού του σημείου})$$

Αρα οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι

$$y = f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \text{ και } y = f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην f και κάνοντας λίγες πράξεις βρίσκουμε:

$$y = -\frac{2}{9}\sqrt{3} + 1\,, \qquad y = \frac{2}{9}\sqrt{3} + 1$$

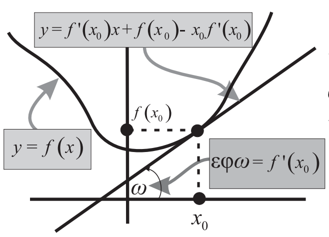
Ασκηση 3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln((x-1)(x-2)(x-3))$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ οι οποίες είναι παράλληλες στον $x'x$.

Λυση

Θα πρέπει να βρούμε τα $x_0 \in \mathcal{D}_f$ για τα οποία είναι $f'(x_0) = 0$. Για να βρούμε το $\mathcal{D}_f$ πρέπει να λύσουμε την ανίσωση $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι λύσεις της είναι τα x με $1 < x < 2$ και τα x με $3 < x$ και επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $(1,2) \cup (3,+\infty)$. Είναι $f'(x) = \frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ και οι αριθμοί που μηδενίζουν την f' θα πρέπει να μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ δηλαδή τον $3x^2 - 12x + 11$. Λύνοντας την εξίσωση $3x^2 - 12x + 11 = 0$ βρίσκουμε τις τιμές $x = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ και $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Επειδή το $\mathcal{D}_f$ δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να ελέγξουμε αν αυτές ανήκουν στο $\mathcal{D}_f$. Βλέπουμε ότι η τιμή $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού ενώ η τιμή $x = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ όχι. Επομένως θα έχουμε μία οριζόντια εφαπτομένη που θα είναι η $y = f\left(2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ δηλαδή η $y = \ln\left(-\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\left(-1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right)$ που μετά τις πράξει γίνεται $y = \ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$.

Ασκηση 4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ οι οποίες είναι σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνία $135°$.

Λυση



Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Ξέρουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 με τον $x'x$ είναι ίση με $f'(x_0)$. Δηλαδή

$$εφω = f'(x_0)$$

Εδώ $\omega = 135°$ και επομένως $εφω = εφ135° = -1$. Άρα ζητάμε τις εφαπτομένες τα σημεία με τετμημένη x_0 τέτοια ώστε $f'(x_0) = -1$ ή ισοδύναμα

$$-\frac{3}{4}x_0^2 - x_0 = -1$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε τις τιμές $x_0 = -2$ και $x_0 = \frac{2}{3}$. Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση της εφαπτομένης $y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f(x_0)$ τις τιμές $f'(x_0) = -1$ και μία φορά το $f(-2) = 0$ και μία το $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$ και βρίσκουμε τις εφαπτομένες:

$$y = -x \qquad y = -x - \tfrac{8}{81}$$

Ασκηση 5 Να βρεθεί εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ που διέρχεται από το σημείο $P(8,1)$

Λυση

Η συνάρτηση ορίζεται σε όλα τα x εκτός του 2. Η τυχούσα εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Εδώ $f(x_0) = \frac{x_0+1}{x_0-2}$ και $f'(x_0) = -\frac{3}{(x_0-2)^2}$ επομένως η τυχούσα εφαπτομένη είναι

$$y = -\frac{3}{(x_0-2)^2}x + \frac{x_0+1}{x_0-2} + \frac{3}{(x_0-2)^2}x_0$$

Θέλουμε η ευθεία αυτή να διέρχεται από το σημείο $P\left(8,1\right)$ επομένως θα πρέπει οι συντεταγμένες του P να την επαληθεύουν. Άρα πρέπει αν αντικαταστήσουμε όπου x το 8 και όπου y το 1 να προκύπτει ισότητα δηλαδή να ισχύει:

$$1=-\frac{3}{\left(x_0-2\right)^2}8+\frac{x_0+1}{x_0-2}+\frac{3}{\left(x_0-2\right)^2}x_0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε $x_0=5$ το οποίο είναι μία δεκτή τιμή αφού ανήκει στο πεδίο ορισμού. Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$$

Ασκηση 6 Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^x$. Να βρεθεί εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης η οποία να είναι κάθετη στην ευθεία $y=-\frac{1}{e}x+1$.

Λυση

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι της μορφής $y=f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)x_0$ και για να είναι κάθετη στην ευθεία $y=-\frac{1}{e}x+1$ θα πρέπει $f'\left(x_0\right)\left(-\frac{1}{e}\right)=-1$ δηλαδή $f'\left(x_0\right)=e$. Αλλά $f'\left(x\right)=e^x$ και επομένως $f'\left(x_0\right)=e^{x_0}$. Θέλουμε λοιπόν να είναι $e^{x_0}=e$ και επομένως $x_0=1$. Άρα $f\left(x_0\right)=e$ και $f'\left(x_0\right)=e$ και αντικάθιστώντας στον γενικό τύπο της εφαπτομένης βρίσκουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y=ex$.

Ασκηση 7 Να εξετασθεί αν η ευθεία $y=6x+2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)$.

Λυση

Η f ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Είναι $f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)$ και $f'\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)$ οπότε $f\left(x_0\right)=x_0^3-x_0^2+x_0-1$ και $f'\left(x_0\right)=3x_0^2-2x_0+1$. Αντικαθιστώντας στον τύπο της εξίσωσης εφαπτομένης βρίσκουμε ότι η γενική εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ είναι:

$$y=\left(3x_0^2-2x_0+1\right)x-2x_0^3+x_0^2-1 \quad (*)$$

Για να είναι η

$$y=6x+2 \quad (**)$$

εφαπτομένη πρέπει να είναι κάποια από τις ευθείες $(*)$ με άλλα λόγια θα πρέπει να υπάρχει x_0 από το πεδίο ορισμού της f, που εδώ είναι το $\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(*)$ και $(**)$ να συμπίπτουν. Αυτό θα ισχύει μόνο αν οι αντίστοιχοι συντελεστές στα δεύτερα μέλη των δύο εξισώσεων είναι ίσοι δηλαδή αν:

$$3x_0^2-2x_0+1=6 \qquad (1)$$

$$-2x_0^3+x_0^2-1=2 \qquad (2)$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) βρίσκουμε τις τιμές $x_0=-1$ και $x_0=\frac{5}{3}$. Οι τιμές αυτές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αντικαθιστώντας μία-μία αυτές τις τιμές στην εξίσωση (2) βλέπουμε ότι η πρώτη την επαληθεύει ενώ η δεύτερη όχι. Συμπεραίνουμε ότι πράγματι η δοθείσα ευθεία είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της που έχει τετμημένη $x_0=-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = -x^2 + 3x - 2$.

ΛΥΣΗ

Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εδώ πρέπει να ελέγξουμε δύο πράγματα

- ότι η δοθείσα ευθεια εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f και
- ότι εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g

Έχουμε λοιπόν:

Η $\mathbf{y = 3x - 2}$ εφάπτεται στην $\mathcal{C}_\mathbf{f}$ Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ είναι $y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$. Η $y = 3x - 2$ θα είναι εφαπτομένη αν το σύστημα:

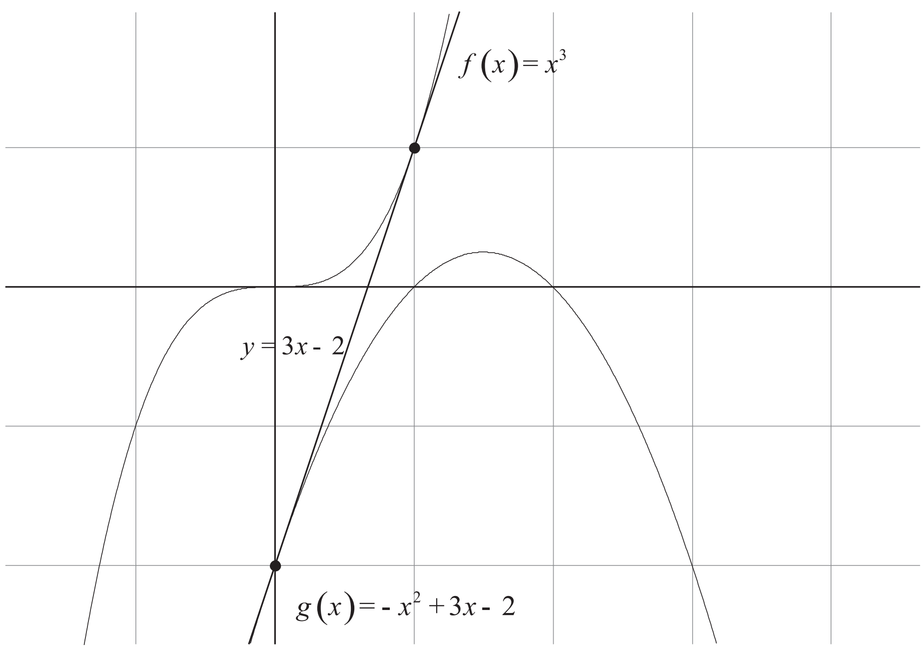
$$\left.\begin{array}{l} 3x_0^2 = 3 \\ -2 = -2x_0^3 \end{array}\right\}$$

έχει λύση. Εύκολα βρίσκουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση $x_0 = 1$ και επομένως η ευθεία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με τετμημένη 1.

Η $\mathbf{y = 3x - 2}$ εφάπτεται στην $\mathcal{C}_\mathbf{g}$ Η γενική εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_g$ είναι $y = (-2x_0 + 3)\,x + x_0^2 - 2$ και για να είναι η Η $y = 3x - 2$ εφαπτομένη θα πρέπει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_0 + 3 = 3 \\ x_0^2 - 2 = -2 \end{array}\right\}$$

να έχει λύση. Πράγματι έχει μοναδική λύση το $x_0 = 0$ και επομένως η ευθεία εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της g στο σημείο με τετμημένη 0.



ΑΣΚΗΣΗ 9 Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ και $g\left(x\right)=\frac{x+7}{x+3}$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των γραφικών τους παραστάσεων.

ΛΥΣΗ

Η f ορίζεται σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 0 ενώ η g σε όλους εκτός του -3. Θέλουμε να βρούμε τις κοινές εφαπτομένες των $\mathcal{C}_f$, και $\mathcal{C}_g$. Αναζητούμε λοιπόν ευθείες που συμβαίνει να είναι εφαπτομένες **και** της $\mathcal{C}_f$ **και** της $\mathcal{C}_g$. Για να τις βρούμε θα αναζητήσουμε τις εφαπτομένες της $\mathcal{C}_f$ που είναι εφαπτομένες **και** της $\mathcal{C}_g$. Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ είναι

$$y=f'\left(x_1\right)x+f\left(x_1\right)-f'\left(x_1\right)x_1$$

ενώ της $\mathcal{C}_g$ είναι

$$y=g'\left(x_2\right)x+g\left(x_2\right)-g'\left(x_2\right)x_2$$

Χρησιμοποιήσαμε αυτή τη φορά όχι ένα γράμμα x_0 για την τετμημένη του σημείου επαφής αλλά δύο δηλαδή x_1 και x_2 γιατί χρειαζόμαστε να περιγράψουμε εφαπτομένες δύο διαφορετικών γραφικών παραστάσεων όπου τα σημεία επαφής ενδέχεται να είναι διαφορετικά. Υπολογίζοντας και τις παραγώγους βρίσκουμε ότι η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ είναι:

$$y=-\frac{1}{x_1^2}x+\frac{2}{x_1} \tag{3}$$

ενώ της $\mathcal{C}_g$ είναι:

$$y=-\frac{4}{\left(x_2+3\right)^2}x+\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2} \tag{4}$$

Ζητάμε τα x_1, x_2 για τα οποία οι ευθείες (3), (4) συμπίπτουν δηλαδή για τα οποία ισχύει:

$$-\frac{1}{x_1^2}=-\frac{4}{\left(x_2+3\right)^2}$$

$$\frac{2}{x_1}=\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων. Έχουμε διαδοχικά για $x_1\neq 0$,$x_2\neq -3$ τις ισοδυναμίες:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{x_1^2}=-\frac{4}{\left(x_2+3\right)^2} \\ \frac{2}{x_1}=\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(λύνουμε την πρώτη εξίσωση)}$$

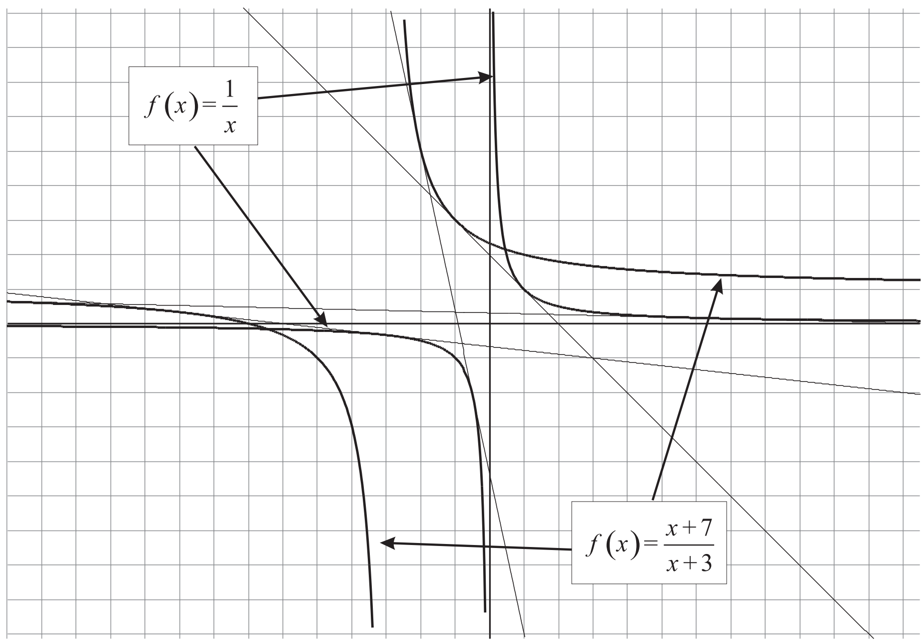
$$\left.\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2} \\ \frac{2}{x_1}=\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2} \\ \frac{2}{-\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{2}}=\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}}=\frac{x_2^2+14x_2+21}{\left(x_2+3\right)^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{..πράξεις..}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2} \\ x_2^2+18x_2+33=0 \quad \text{ή} \quad x_2^2+10x_2+9=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(λύνουμε τις δύο δευτεροβάθμιες)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}, & x_2 = -9 + 4\sqrt{3} \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}, & x_2 = -9 - 4\sqrt{3} \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}, & x_2 = -9 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}, & x_2 = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(αντικαθιστούμε)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 3 - 2\sqrt{3}, & x_2 = -9 + 4\sqrt{3} \\ x_1 = 3 + 2\sqrt{3}, & x_2 = -9 - 4\sqrt{3} \\ x_1 = -3, & x_2 = -9 \\ x_1 = 1, & x_2 = -1 \end{array}\right\}$$



Όλες οι τιμές που βρήκαμε είναι δεκτές και επομένως έχουμε 4 κοινές εφαπτομένες. Αυτές μπορούν να βρεθούν αν αντικαταστήσουμε τις τιμές του x_1 στη σχέση (3).[1] Θα βρούμε τις ευθείες:

$$y = -\frac{1}{\left(3 - 2\sqrt{3}\right)^2}x + \frac{2}{3 - 2\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{1}{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2}x + \frac{2}{3 + 2\sqrt{3}}$$

$$y = 2 - x$$

$$y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$$

[1] εξ' ίσου καλά μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τις τιμές του x_2 στη σχέση (4)