της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Υπενθυμίσεις για την Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

Όλοι οι αριθμοί αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θεωρούνται πραγματικοί. Ο ν είναι θετικός ακέραιος.

1 Ταυτότητες - Ανισότητες

1. $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$
3. $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)\left(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2\right)$
4. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$
5. $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)\left(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}\right)$
6. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$
   $= (\alpha + \beta + \gamma)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha\right) =$
   $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\left((\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\right)$
7. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = \beta = \gamma \\ \eta' \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{matrix}\right\}$
8. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$
9. $\alpha^2 + \beta^2 \geq \pm 2\alpha\beta$
10. $\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$
11. $(1 + \alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha, \quad -1 < \alpha \neq 0, \;\; \nu \geq 2$
12. $\alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha < \beta$

2 Δυνάμεις - Ρίζες - Λογάριθμοι

1. $x = \sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^\nu = \alpha \end{cases}$
2. $\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu} = \alpha, \;\; \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$
3. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}$
4. Αν $\alpha \geq 0, \;\; \beta > 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$,
5. Αν $\alpha \geq 0, \;\; \beta > 0$ τότε
   $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}^{\mu}, \;\; \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}, \;\; \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
6. Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}^{\mu}$
7. Αν $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ τότε
   $\alpha^{x_1}\alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2}, \; \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \alpha^{x_1 - x_2}, \; \left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$
8. Αν $\alpha, \;\; \beta > 0$ τότε $(\alpha\beta)^x = \alpha^x\beta^x, \; \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$
9. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ τότε $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
10. Αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
11. Αν $\alpha < 1$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$
12. $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 0, \;\; \alpha \neq 1 \\ x > 0 \\ \alpha^y = x \end{cases}$
13. $\log x = \log_{10} x, \ln x = \log_e x$
14. $\log_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$
15. Αν $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ τότε $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$
16. Αν $\alpha > 1$ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$
17. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$
18. $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$
19. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$
20. $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$
    $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$
    $x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0$
21. Αν $x_1, x_2 > 0, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ τότε
    $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$
    $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$
    $\log_\alpha x_1^k = k \log_\alpha x_1$
22. Αν $x_1, x_2 > 0$ τότε
    $\ln (x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
    $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
    $\ln x_1^k = k \ln x_1$

3 Απόλυτες Τιμές

1. $|\alpha| = \begin{cases} -\alpha & \alpha < 0 \\ \alpha & \alpha \geq 0 \end{cases}$
2. $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$
3. $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$
4. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \pm\alpha$
5. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
6. $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$
7. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
8. $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
9. $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$
10. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
11. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$

4 Ορίζουσες και Γραμμικά Συστήματα

1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$
2. Έστω το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{aligned}\right\} \;(\Sigma)$$

όπου κάποιος από τους $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ είναι διάφορος του 0. Έστω $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$. Τότε:

(α′) Αν $D \neq 0$ το (Σ) έχει μία μόνο λύση (x, y) με

$$x = \frac{D_x}{D},\; y = \frac{D_y}{D}$$

(β′) Αν $D = 0$ και κάποιος από τους D_x, D_y είναι διάφορος του μηδενός το (Σ) είναι αδύνατο.

(γ′) Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις (x, y).

5 Δευτεροβάθμιο Τριώνυμο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

1. **Πρόσημο-Ρίζες**

   (α′) Αν $\Delta > 0$ τότε η f έχει δύο άνισες ρίζες $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Όταν το x είναι εκτός των ριζών η $f(x)$ είναι ομόσημη του α ενώ όταν είναι μεταξύ των ριζών είναι ετερόσημη του α.

   (β′) Αν $\Delta = 0$ τότε η f έχει μία διπλή ρίζα $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Όταν το x είναι διάφορο της διπλής ρίζας η $f(x)$ είναι ομόσημη του α

   (γ′) Αν $\Delta < 0$ η f εν έχει ρίζες και είναι ομόσημη του α για όλες τις πραγματικές τιμές του x

2. **Μέγιστα-Ελάχιστα**

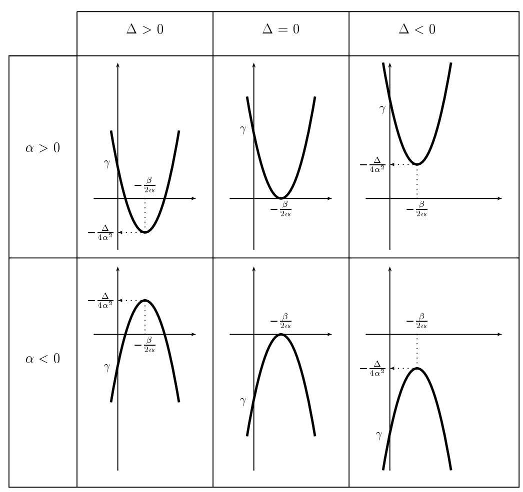
   (α′) Αν $\alpha > 0$ η f έχει ελάχιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

   (β′) Αν $\alpha < 0$ η f έχει μέγιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

3. **Σχέσεις του Vieta**

   (α′) Αν είναι $\Delta \geq 0$ τότε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της f είναι $S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, $P = \rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

   (β′) Αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P τότε είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$.



1.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\eta\mu$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sigma\upsilon\nu$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*
$\sigma\varphi$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. $\boxed{\eta\mu x^2 + \sigma\upsilon\nu x^2 = 1}$

3. $\boxed{\varepsilon\phi x \cdot \sigma\varphi x = 1}$ $\boxed{\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}$ $\boxed{\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$

4. $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2 x}}$ $\boxed{\eta\mu x^2 = \frac{\varepsilon\phi^2 x}{1+\varepsilon\phi^2 x}}$

5. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(-x\right) = \sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(-x\right) = -\eta\mu x}$
$\boxed{\varepsilon\varphi\left(-x\right) = -\varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(-x\right) = -\sigma\varphi x}$

6. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\pi - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\pi - x\right) = \eta\mu x}$
$\boxed{\varepsilon\varphi\left(\pi - x\right) = -\varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\pi - x\right) = -\sigma\varphi x}$

7. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\pi + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\pi + x\right) = -\eta\mu x}$
$\boxed{\varepsilon\varphi\left(\pi + x\right) = \varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\pi + x\right) = \sigma\varphi x}$

8. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x}$
$\boxed{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x}$

9. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\alpha \pm \beta\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$
$\boxed{\eta\mu\left(\alpha \pm \beta\right) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \pm \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}$
$\boxed{\varepsilon\varphi\left(\alpha \pm \beta\right) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha \pm \varepsilon\varphi\beta}{1 \mp \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}}$

10. $\boxed{\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$
$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha}$

11. $\boxed{\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ $\boxed{\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ $\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$

12. $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$ $\boxed{\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

13. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν
$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$ (Νόμος των συνημιτόνων)
$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R}$ (Νόμος των ημιτόνων, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου)

7 Μερικες εξισώσεις

1. $x^\nu = \alpha$

	ν άρτιος	ν περιττός
$\alpha \geq 0$	$x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$	$x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	αδύνατη	$x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

2. $|x| = \alpha$

$\alpha \geq 0$	$\alpha < 0$
$x = \pm\alpha$	αδύνατη

3. $\eta\mu x = \alpha$

$\lvert\alpha\rvert \leq 1,\ \alpha = \eta\mu\theta$	$\lvert\alpha\rvert > 1$
$x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	αδύνατη

4. $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

$\lvert\alpha\rvert \leq 1,\ \alpha = \sigma\upsilon\nu\theta$	$\lvert\alpha\rvert > 1$
$x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\ x = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	αδύνατη

5. $\varepsilon\varphi x = \alpha, \alpha = \varepsilon\varphi\theta$

$$\boxed{x = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

6. $\alpha^x = \beta, \quad \alpha > 0$

$\alpha > 0$	$\alpha \leq 0$
$x = \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}$	αδύνατη

7. $\ln x = \alpha$

$$\boxed{x = e^\alpha}$$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

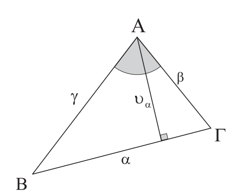
8 Εμβαδά

1. Το εμβαδόν E τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A =$$

$$= \sqrt{\tau\left(\tau - \alpha\right)\left(\tau - \beta\right)\left(\tau - \gamma\right)} = \frac{1}{2}\left|D\right|$$

όπου $D = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)$ και $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.



Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς α τότε $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Το εμβαδόν παραλληλογράμμου είναι βάση×ύψος του τε-

δ_1, δ_2 είναι $\frac{\delta_1\delta_2}{2}$. Το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις B, β και ύψος υ είναι $\frac{B+\beta}{2}\upsilon$.

3. Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι $\pi\rho^2$ (το μήκος του είναι $2\pi\rho$). Για το εμβαδόν τομέα και το μήκος τόξου γωνίας φ

	μήκος τόξου	εμβαδόν τομέα
γωνία φ σε ακτίνια	$\rho\varphi$	$\frac{\rho^2\varphi}{2}$
γωνία φ σε μοίρες	$\frac{\pi\rho\varphi}{180}$	$\frac{\pi\rho^2\varphi}{360}$

9 Συντεταγμένες

Εστω τα σημεία $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$.

1. Η απόσταση των Α, Β είναι
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. Το μέσο του τμήματος ΑΒ είναι το $\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2}{2}\right)$

3. Ο συντελεστής διευθύνσεως του $\overrightarrow{AB}$ καθώς και της ευθείας ΑΒ (εφ'οσον $x_1 \neq x_2$) είναι $\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

4. Εστω $D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

(α′) Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $D = 0$.

(β′) Αν $D \neq 0$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{1}{2}|D|$.

10 Διανύσματα

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

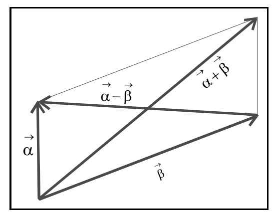
1. Το άθροισμα-διαφορά τους είναι
$$\vec{\alpha} \pm \vec{\beta} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

2. Ο γραμμικός συνδυασμός τους $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ είναι
$$\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2)$$

3. Το εσωτερικό γινόμενο τους είναι
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$$

4. Το μέτρο του $\vec{\alpha}$ είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

5. Ισχύει
$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$



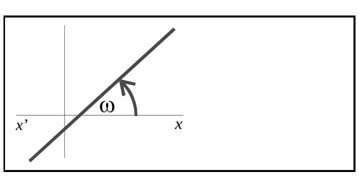
6. $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}| + \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$

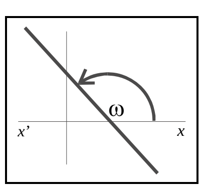
7. $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$(εφ'οσον ορίζονται οι συντελεστές διευθύνσεως) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

8. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow$(εφ'οσον ορίζονται οι συντελεστές διευθύνσεως) $\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}} = -1$

11 Ευθεία-Κύκλος

1. Η γενική εξίσωση ευθείας είναι η $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ με $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| \neq 0$. Αν $\mathrm{B} \neq 0$ η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \varepsilon\varphi\omega$ όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $x'x$ με την ευθεία.





2. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι $d = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$.

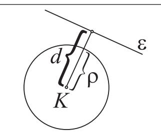
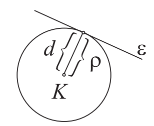
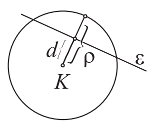
3. Μια ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως α έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Οι $y = \alpha_1 x + \beta_1$, $y = \alpha_2 x + \beta_2$ τέμνονται αν και μόνο αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και είναι κάθετες αν $\alpha_1\alpha_2 = -1$. Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda$ οι ευθείες έχουν την ίδια διεύθυνση και απόσταση $\frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ και αν επιπλέον $\beta_1 = \beta_2$ τότε συμπίπτουν.

4. Ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

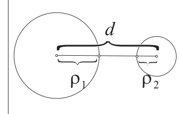
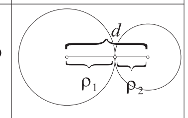
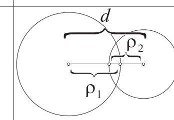
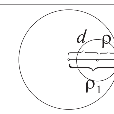
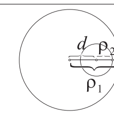
των αξόνων τότε η κύκλος γράφεται $x^2+y^2=\rho^2$ και η εφαπτομένη του σε τυχόν σημείο του $P\left(x_1,y_1\right)$ είναι $x_1x+y_1y=\rho^2$.

5. Η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{A}y+\Gamma=0$ είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνο αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$. Το κέντρο του είναι το $K\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και η ακτίνα του είναι $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

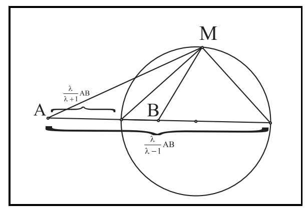
6. Έστω ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ και d η απόσταση του K από μία ευθεία ε.

Αν	Τότε	Σχήμα
$d>\rho$	Ευθεία και κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία	
$d=\rho$	Ευθεία και κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται)	
$d<\rho$	Ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία	

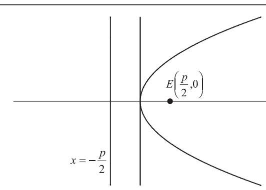
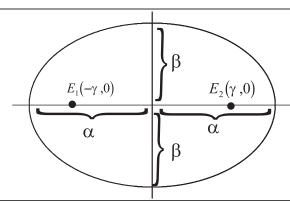
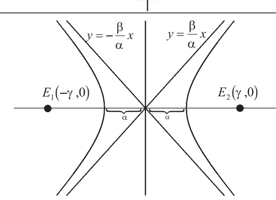
7. Θεωρούμε δύο κύκλους με κέντρα K_1, K_2 και ακτίνες $\rho_1>\rho_2$. Έστω d η απόσταση των κέντρων τους (διάκεντρος).

Αν	Τότε	Σχήμα
$d>\rho_1+\rho_2$	Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία	
$d=\rho_1+\rho_2$	Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται εξωτερικά)	
$\rho_1-\rho_2<d<\rho_1+\rho_2$	Οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία	
$d=\rho_1-\rho_2$	Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται εσωτερικά)	
$d<\rho_1-\rho_2$	Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία	

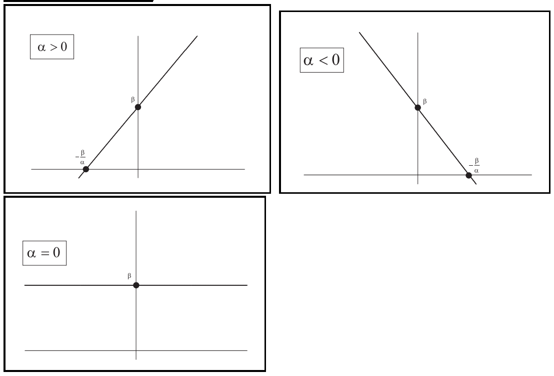
8. Το σύνολο των σημείων M που ο λόγος τω αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A,B είναι σταθερός και ίσος με $\lambda\neq1$ είναι κύκλος (Κύκλος του Απολλωνίου) με διάμετρο που έχει άκρα τα σημεία τα οποία διαιρούν το τμήμα AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο λ.



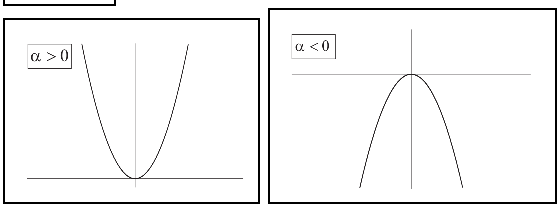
12 Κωνικές Τομές

Κωνική	Τι είναι	Εξίσωση σε Κανονική Μορφή	Σχήμα	Άλλα Στοιχεία
Παραβολή	Το σύνολο όλων των σημείων που ισαπέχουν από δοθείσα ευθεία (διευθετούσα) και δοθέν σημείο (εστία)	Εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ Διευθετούσα $x=-\frac{p}{2}$ $y^2=2px$		
Έλλειψη	Το σύνολο όλων των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων από δοθέντα σημεία (εστίες) είναι σταθερό.	Εστίες $E_{1,2}(\mp\gamma,0)$ Σταθερό Άθροισμα 2α $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$
Υπερβολή	Το σύνολο όλων των σημείων που η διαφορά των αποστάσεων από δοθέντα σημεία (εστίες) είναι σταθερό.	Εστίες $E_{1,2}(\mp\gamma,0)$ Σταθερή Διαφορά 2α $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$ Ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$

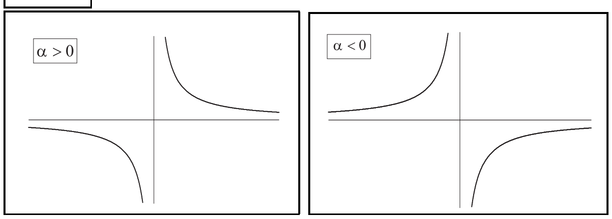
1. $\boxed{y = \alpha x + \beta}$



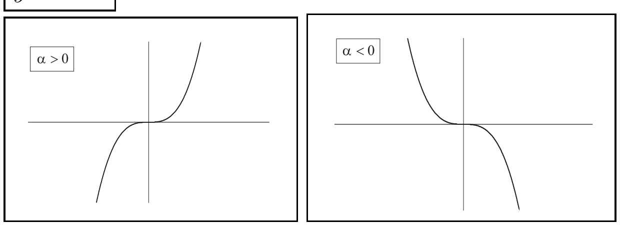
2. $\boxed{y = \alpha x^2}$



3. $\boxed{y = \frac{\alpha}{x}}$

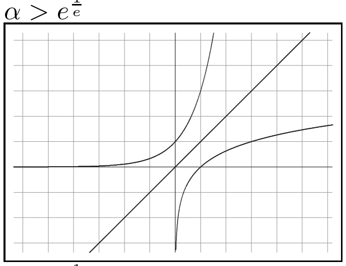


4. $\boxed{y = \alpha x^3}$

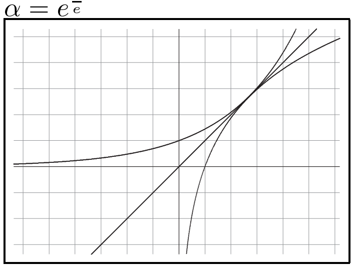


5. [1] $\boxed{y = \alpha^x, \qquad y = \log_\alpha x}$

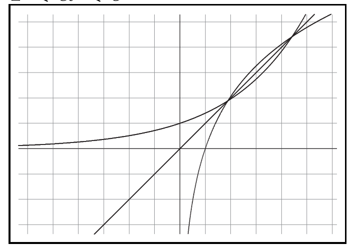
$\alpha > e^{\frac{1}{e}}$



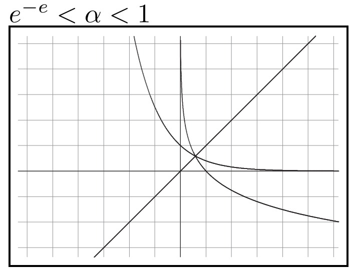
$\alpha = e^{\frac{1}{e}}$



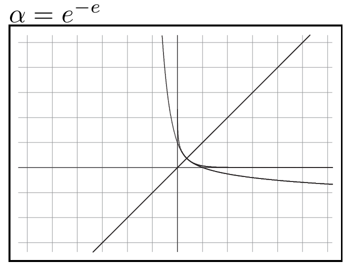
$1 < \alpha < e^{\frac{1}{e}}$



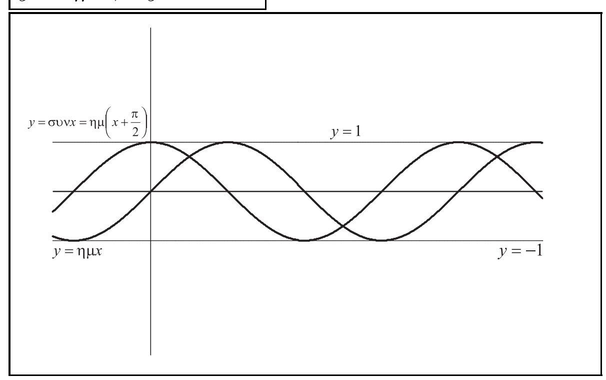
$e^{-e} < \alpha < 1$



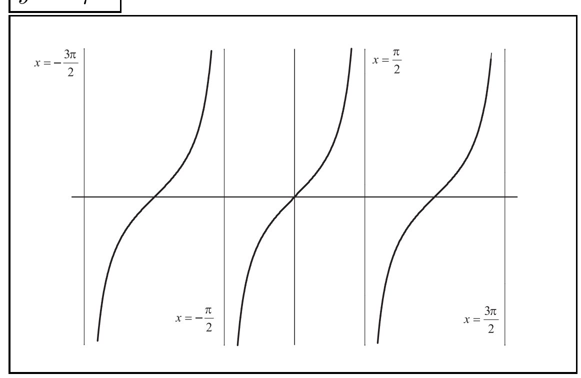
$\alpha = e^{-e}$



6. $\boxed{y = \eta\mu x, \quad y = \sigma\upsilon\nu x}$



7. $\boxed{y = \varepsilon\varphi x}$



[1] Για λεπτομέρειες: Μπάμπης Τουμάσης: "Πόσο καλά έχουμε κατανοήσει την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση;" ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β', 1994 τ.3, 52-55