ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

ΤΑΞΗ Γ΄
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέματα για Επανάληψη

Γεώργιος Θεοχάρης
Γεράσιμος Κουτσανδρέας
Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι αν $|z|^2 - (\mathrm{Im}(z) + 1)^2 + 1 = 0$, τότε οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$.

2. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του (α) ερωτήματος να βρεθούν αυτοί που έχουν μέτρο $\sqrt{8}$.

3. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ρ υπάρχουν πάντα δυο μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν το ερώτημα 1. τέτοιοι ώστε να ισχύει $|z| = \rho$.

ΘΕΜΑ 2 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. και έστω

$$f(z) = \frac{2z - i\overline{z}}{z - 1} \quad z \neq 1$$

1. Αποδείξτε ότι $f(1 - i) = 3 + 3i$

2. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $(f(1 - i))^{2004}$ είναι πραγματικός αριθμός.

3. Έστω A, B οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $f(1 - i)$ και $\mathrm{f}(1 + \mathrm{i})$ στο μιγαδικό επίπεδο. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. (Ο η αρχή των αξόνων).

ΘΕΜΑ 3

1. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 3$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

2. Να αποδείξτε ότι αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στο σύνολο (Σ) τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right)$$

κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ \alpha + 1, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση
$$(f(x))^{2005} = \kappa$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(f(x)) - f(x) = 3 \text{ και } f(1) = 4$$

1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(1)\cdot x^3+2x-1}{f(4)\cdot x^2-x+2}$$

2. Αν $\lim\limits_{x\to5} f(x)=8$, αποδείξτε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο με τεταγμένη 6.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x\cdot f(x)-30\cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Αποδείξτε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(4,7)$.

4. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(1,7)$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$10\cdot f(x_0)=2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+5\cdot f(5)$$

Θεμα 6 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

3. Έστω η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

(ΘΕΜΑ 2003)

Θεμα 7 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,5)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+x^2=5x+12$$

1. (α′) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(0,5)$.

   (β′) Αποδείξτε ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,5)$.

2. Θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και η C_f διέρχεται από το σημείο $N\left(2,3\sqrt{2}\right)$.

   (α′) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α (1 , $A(1,f(1))$).

   (β′) Ένα κινητό $M(x,y)$, με $x\geq1$ ξεκινά από το σημείο A και κινείται πάνω στην ευθεία $y=\frac{3}{8}x+\frac{29}{8}$, με ταχύτητα $2m/sec$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M, τη χρονική στιγμή που αυτό περνά από το σημείο Ρ ($P\left(\frac{11}{3},5\right)$).

Θεμα 8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Αποδείξτε ότι
$$f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$
3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) + \frac{1}{x} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 9 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$$(f \circ f)(x) = 4x - 3$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι $f(1) = 1$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, αν γνωρίζουμε ότι αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.
3. Αν
$$\lim_{x \to 1/2} \frac{f(x)}{\eta\mu\,(2x-1)} = 1$$
και
$$\lim_{x \to 1/2} \left(2x^3 - x^2 + 2x - 1\right) \cdot g(x) = \frac{5}{4}$$
να βρεθεί το
$$\lim_{x \to 1/2} \left(f(x) \cdot g(x)\right)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 2) $y = 2x - 1$, 3) 1.

ΘΕΜΑ 10 Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$ για την οποία ισχύουν $f(x) \neq 0,\ \ f(1) > 0$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

1. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$,για κάθε $x \in [1, 4]$.
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$g(x) = f^2(x) - f(1) \cdot f(4)$$
Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
3. Θεωρούμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται στη C_f. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ ένα σημείο της C_f στο οποίο η διανυσματική ακτίνα του z στο μιγαδικό επίπεδο , σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ΘΕΜΑ 11 Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 + \beta x - 12, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases}$$
όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:
   (α′) Να βρεθεί η συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$, όπου $g(x) = \ln(x-1)$.
   (β′) Αποδείξτε ότι η C_h τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
   (γ′) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = (f(x))^{2005}$ και η ευθεία $y = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε κ .

ΘΕΜΑ 12 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 2$, για την οποία ισχύουν :

$$f(a+x) = f(a) \cdot f(x) \cdot e^{2ax}$$

και

$$f(x) \neq 0$$

για κάθε $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι: $f(0) = 1$ και $f'(x) = 2 \cdot f(x)(x+1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Αποδείξτε ότι: Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$$

   είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
3. Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 13 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,\lambda] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(\lambda) = \lambda$.

1. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\lambda)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \lambda - \xi$.
2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\lambda)$, δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,\lambda)$ με $0 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \lambda$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$

ΘΕΜΑ 14 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - x^2 - \ln x, \quad x > 0$$

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Αποδείξτε ότι $x^3 \geq x^2 + \ln x$ για κάθε $x > 0$.
3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
4. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = e^{2006}$, αποδείξτε ότι

$$\alpha^2(\alpha-1) + \beta^2(\beta-1) + \gamma^2(\gamma-1) \geq 2006$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1. Ελάχιστο το $f(1) = 0$. 3. Σύνολο τιμών $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 15 Έστω συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε ότι:

1. Η f είναι περιττή
2. $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(a+\beta-x)dx$
3. $\int_a^\beta f(x)dx = f(a+\beta)\cdot\left(\frac{\beta-a}{2}\right)$.

Θεμα 16 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + \ln x, \quad x > 0$$

1. Αποδείξτε ότι: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
2. Αποδείξτε ότι:

$$e - 1 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq (e-1)\left(e^2+1\right)$$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{f(x)}dx$.

Θεμα 17 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot\ln\frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
3. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, $\lambda > 0$.
4. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.

Θεμα 18 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)|$$

1. Να αποδείξετε ότι ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_g$ στο $+\infty$.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη $\mathcal{C}_f$ τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.
3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^2 |g(x)|\,dx \leq \ln 5 + 2$$

Γεώργιος Θεοχάρης
Γεράσιμος Κουτσανδρέας
Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

ΘΕΜΑ 19 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$, και η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = |z - 5i|\, x^2 - 2x - \int_x^0 |z + 3i| \cdot f(t)\, dt$$

για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(0, -3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

2. Να βρεθεί ο μιγαδικός z με το μεγαλύτερο και το μικρότερο μέτρο.

3. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z + 2|$.

ΘΕΜΑ 20 Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z = a + \beta i$, και τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \int_1^{x^2+1} |t \cdot z + z|\, dt - 3x + 2$$

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$, αποδείξτε ότι :

1. $|z| = \frac{1}{2}$

2. Οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού $w = 2z - i$, στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 3. $E = \frac{53}{60}$ τ. μον.

ΘΕΜΑ 21 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t)\, dt, \qquad x \in (0, +\infty)$$

1. Αποδείξτε ότι $f(1) = 0$

2. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

3. Να βρείτε τον τύπο της f.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

ΘΕΜΑ 22 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = 0 \text{ και } x \cdot f'(x) - 2 \cdot f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2. Να βρείτε τον τύπο της f .

3. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x f(t)\,dt}{(\ln x)^2}$$

ΘΕΜΑ 23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_f$ όταν το $x \to -\infty$.

3. Αποδείξτε ότι

$$f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$$

4. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

ΘΕΜΑ 24 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln x + e^x, \quad x \in (1, +\infty)$$

1. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

4. Έστω

$$\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2\ell n2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 2. $+\infty$. 3. $e^{e+1} - e - e^2 - 4$

ΘΕΜΑ 25 Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = x \cdot f'(\xi)$$

2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$$

με $x > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

3. Αν

$$h(x) = e^x + x^5 + x$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1)dx$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 3. $I = \frac{3 \cdot e^7 + 7 \cdot e^3 - 440}{21}$

ΘΕΜΑ 26 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 0 \\ x \cdot \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε τον α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2. Αν $\alpha = -1$

   (α′) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

   (β′) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   (γ′) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

   (δ′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: **(2α′)** όχι **(2β′)** τ. μεγ. το $f(0)$, τ. ελ. το $f\left(\frac{1}{e}\right)$, συν. τιμών $(-1, +\infty)$. **(2γ′)** 2 **(2δ′)** $E = \frac{1+e^2}{4}$ τ. μ.

ΘΕΜΑ 27 Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:
α) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
β) $f(x) = 1 - 2 \cdot x^2 \int_0^1 t \cdot f^2(x \cdot t)\, dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, x \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι ισχύει: $f'(x) = -2 \cdot x \cdot f^2(x)$.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

3. Αποδείξτε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x)$

(ΘΕΜΑ 2001)

ΘΕΜΑ 28 Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x \frac{t\cdot f(t)}{x^2}dt \qquad x>0$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
2. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι
$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x} \qquad x>0$$
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$.
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $\mathcal{C}_f$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες$x=1$ και $x=e$.

(ΘΕΜΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2001)

ΘΕΜΑ 29 Έστω οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f\circ g$ είναι 1-1.

1. Αποδείξτε ότι η g είναι 1-1.
2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση
$$g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$$
έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.
3. Δίνεται επιπλέον ότι οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με
$$(f\circ g)(0)=0$$
και
$$\int_0^{g(x)} f(t)dt+\int_0^x (f\circ g)(t)\,dt=1$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι
$$\int_0^{g(x)+x} f(t)\,dt=1$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 30 Α. Έστω δυο συναρτήσεις h,gσυνεχείς στο $[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε ισχύει: $\int_a^\beta h(x)dx>\int_a^\beta g(x)\,dx$.
Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1, \qquad x\in\mathbb{R}$$

και

$$f(0)=0$$

1. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

2. Αποδείξτε ότι
$$\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x), \qquad x > 0$$

3. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη $\mathcal{C}_f$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, αποδείξτε ότι
$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$

(ΘΕΜΑ 2002)

Θεμα 31 Έστω μια συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$.

1. Αποδείξτε ότι: Η συνάρτηση
$$g(x) = x \cdot f'(x) - f(x)$$
είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

2. Αποδείξτε ότι:
$$x \cdot f'(x) - f(x) > 0$$
για κάθε $x \in (0, +\infty)$

3. Αποδείξτε ότι: Η συνάρτηση
$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$
είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

4. Αν $x > 0$, να λυθεί η ανίσωση
$$\left(x^2 + 4\right) \cdot f(5x) < 5x \cdot f\left(x^2 + 4\right)$$

Θεμα 32 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι :

1. $\alpha^2 > 3\beta$

2. Η f παρουσιάζει δύο ακρότατα διαφορετικού είδους.

3. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-\rho_1} + \dfrac{1}{x-\rho_2} + \dfrac{1}{x-\rho_3}$

4. Αν x_0 θέση τοπικού ακρότατου της f , τότε ισχύει :
$$\frac{1}{x_0 - \rho_1} + \frac{1}{x_0 - \rho_2} + \frac{1}{x_0 - \rho_3} = 0$$

Θεμα 33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^5$.

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία .

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$e^{2\left(x^2-x\right)}-e^{2(6-2x)}=(6-2x)^5-\left(x^2-x\right)^5$$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\left(x\right)=x\left(x-2\right)\cdot e^{f(x)}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'\left(x_0\right)=\frac{2\left(1-x_0\right)}{x_0\left(x_0-2\right)}$$

Απαντηση: 2. $x=-3$ ή $x=2$

Θεμα 34 Έστω η συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ που είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει: $f\left(1\right)=f\left(3\right)=2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g\left(x\right)=\left(x^2-4x+3\right)\cdot f\left(2\right)$$

η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$.

1. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$, με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε να ισχύει:

$$f'\left(\xi_1\right)=g'\left(\xi_1\right)\qquad f'\left(\xi_2\right)=g'\left(\xi_2\right)$$

3. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f''\left(\xi\right)=2$.

Θεμα 35 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$2\cdot f\left(x^3\right)\geq f^2\left(x\right)+1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{C}_f$ διέρχεται από τα σημεία: $\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,1)$ και $\Gamma(0,1)$.

2. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $\mathcal{C}_f$ με τετμημένη στο διάστημα $(-1,0)$, στο οποίο η $\mathcal{C}_f$ έχει οριζόντια εφαπτομένη.

3. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο που μηδενίζεται η f''.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\left(x\right)=x\cdot e^x+f\left(x\right)$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $\mathcal{C}_g$ με τετμημένη στο $(0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη της $\mathcal{C}_g$ σ' αυτό να είναι κάθετη στην ευθεία (ε) : $x+ey-e^2=0$

Θεμα 36 Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f\left(1\right)=2,f\left(e\right)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Αποδείξτε ότι:

1. Υπάρχουν τουλάχιστον δυο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e), x_1 \neq x_2$ ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
3. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε
$$f(x_0)\left[f'(x_0) - 4f^4(x_0)\right] = x_0$$
4. Η ευθεία $y = -x+e+2$ τέμνει τη $\mathcal{C}_f$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1, e)$.
5. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, \mathrm{e}), (\xi_1 \neq \xi_2)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:
$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$$

(ΘΕΜΑ από Ε.Μ.Ε)

Θεμα 37 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \alpha \cdot \ln x - x - 2$$
με $x > 0$, $\alpha > 0$.

1. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $f(a)$.
3. Αν $\alpha = 1$ αποδείξτε ότι:
   (α′) Η μέγιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.
   (β′) Υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{2-e}{e-1}$$

Θεμα 38 Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να βρείτε τα σημεία καμπής της $\mathcal{C}_f$.
3. Αποδείξτε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_f$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: **1.** τοπ. ελαχ. στο $x_1 = -1$, τοπ. μεγ. στο $x_2 = 1$ **2.** σημ . καμπ. στα $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$)

Θεμα 39 Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(x) = \frac{(a-1)\cdot x + 6}{x+\beta}, \quad x \in (-1, +\infty)$$
με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = 2$ και $x = -1$.

1. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι
$$f\left(x\right)=\frac{2x+6}{x+1},\ \ x>-1.$$
2. Αν για τον θετικό αριθμό κ ισχύει:
$$f\left(k^{4010}\right)<f\left(k^{2005}\right)$$
να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών του κ.
3. Να βρείτε συνάρτηση $g\left(x\right)$ για την οποία ισχύουν:
   (α′) $g'\left(x\right)=f\left(x\right)$ για κάθε $x>-1$ και
   (β′) Η $\mathcal{C}_g$ διέρχεται από το σημείο $M(0,2)$.
4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση
$$h\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{x+1}\qquad x>-1$$

Θεμα 40 Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει:
$$\int_1^x f\left(t\right)dt+\int_x^1 g\left(t\right)dt=x^2-2x+1$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει δύο λύσεις $\rho_1<1<\rho_2$.

1. Αποδείξτε ότι:
   (α′) Η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).
   (β′) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$ τέτοιο ώστε $g'\left(\xi\right)=-2$
2. Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι:
   (α′) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
   (β′) Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο $\mathbb{R}$, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο ξ του ερωτήματος 1 (β′).
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f,\mathcal{C}_g$ και τον άξονα $y'y$.

Θεμα 41 Θεωρούμε τη συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\int_x^{x^3} f\left(t\right)dt\leq x^3-x$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι: $f(-1)=f\left(0\right)=f\left(1\right)$

2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ ώστε οι εφαπτόμενες της C_f σ' αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

3. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(-1, 1)$ που μηδενίζεται η f''.

ΘΕΜΑ 42 Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ για την οποία ισχύουν: $f(1) = 1, f'(1) = 0$ και $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) + 1 = 0$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

1. Αποδείξτε ότι:

   (α') $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$

   (β') Ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.

2. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο ισχύουν: $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ και $|z - 1| = 1$.

   (α') Αποδείξτε ότι η εικόνα του z κινείται στη C_f.

   (β') Αν A, B είναι δυο τυχαίες εικόνες του z , αποδείξτε ότι $(AB) \leq 2$.

3. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 43 Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f^2(t)}dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Αποδείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και αποδείξτε ότι $f''(x) = f(x)$.

2. Δίδονται οι συναρτήσεις :

   $$\Phi(x) = (f(x) + f'(x))\, e^{-x} \text{ και } h(x) = (f(x) - f'(x))\, e^{x}$$

   Αποδείξτε ότι οι Φ και h είναι σταθερές στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τους τύπους τους.

3. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι

   $$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. Ένα κινητό κινείται πάνω στη C_f. Τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ που διέρχεται από το σημείο $A(1, f(1))$ η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό 5 μονάδες /sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη χρονική στιγμή .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: **4.** $y'(t_0) = -\frac{5e^2+5}{2e}$ μον/σες)

ΘΕΜΑ 44 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f^3(x) + 2f(x) + 1 = 8x^3 + 4x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Δείξτε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ 45 Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με

$$f'(x) = g'(x) + 2$$

και και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in R$. Δίνεται ακόμη ότι οι ευθείες $y = 2x + 5$ και $y = -5$ είναι ασύμπτωτες των $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$ αντίστοιχα για $x \to +\infty$

1. Να βρείτε το όριο
$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x) + 5}{f(x) - 2x - 5}$$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$
3. Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) + 2x + 10$
4. Αν $g(x) = e^{-x} - 5$ να βρεθεί το ολοκλήρωμα
$$A = \int f(x) e^x dx$$

ΘΕΜΑ 46 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt, \quad \alpha > 0$$

και ο μιγαδικός αριθμός $z = g(x) + xi$, $x \in \mathbb{R}$ με

$$|\bar{z} + i| \leq |z - 1|$$

1. Να αποδείξετε ότι
   (α′) Η g αντιστρέφεται.
   (β′) Οι εικόνες των z βρίσκονται στην $\mathcal{C}_{g^{-1}}$
2. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $\mathrm{Rez} \leq \mathrm{Imz}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   (β′) $\alpha = 1$.
   (γ′) $\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{2} g(2) < \frac{1}{2} g(1) + \frac{1}{1+e}$.

ΘΕΜΑ 47 Έστω$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$$F(x) = \int_{x^2 - x}^{x+3} f(t) dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $F(x) \leq x^2 - 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθεί η F'.
2. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 6)$ τέτοιο ώστε$f'(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ 48 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = (7+x)^{\frac{1}{2}} + (11-x)^{\frac{1}{2}}$$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
2. Να βρεθούν τα ακρότατα της f.
3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ΘΕΜΑ 49 Δίνεται η συνάρτηση$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = \frac{1}{2}$ και

$$f(x+y) = f(x)f(\alpha - y) + f(y)f(\alpha - x)$$

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ όπου α σταθερός. Να δείξετε ότι:

1. $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.
2. $f(x) = f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = f(-x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) \neq 0$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.
5. $f(x+y) = 2f(x)f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \frac{1}{2}$για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 50 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

1. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.
2. Να βρεθούν τα όρια της για $x \to +\infty$ και για $x \to -\infty$.
3. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα

ΘΕΜΑ 51 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = 2x\ln x + 2e^x - 2, \quad x > 0$$

1. Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και κυρτότητα
3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.
4. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι αρνητικός αριθμός.
5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΘΕΜΑ 52 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + x - 2$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\ln\left(x^2+9x+18\right)=\ln\left(x^4+x^2+18\right)-\left(9x-x^4\right)$$

ΘΕΜΑ 53 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+x-1$

1. Δείξτε ότι είναι γνήσιως αύξουσα.
2. Δείξτε ότι είναι 1-1.
3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.
4. Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int f^{-1}(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 54 Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-\alpha x+\beta}}$$

1. Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα α,β ώστε να είναι $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$;
2. Για ποια τιμή του α ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\sqrt{x^2-\alpha x+\beta}\right)=\frac{1}{2}$;
3. Για το α του προηγουμένου ερωτήματος να βρείτε για ποια τιμή του β η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: **1.** $\alpha^2<4\beta$ **2.** $\alpha=1$ **3.** $\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ΘΕΜΑ 55 Έστω f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha,\beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι αν για όλα τα x ισχύει

   $$f(x)<g(x)$$

   τότε θα υπάρχει θετικός αριθμός c έτσι ώστε για όλα τα x να ισχύει

   $$f(x)+c<g(x)$$

2. Να αποδείξετε ότι αν οι f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

ΘΕΜΑ 56 Έστω f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα Δ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

1. Να αποδείξετε ότι
   - ή θα ισχύει $f(x)>g(x)$ για όλα τα x
   - είτε θα ισχύει $f(x)<g(x)$ για όλα τα x
2. Έστω $h:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε να ισχύει

   $$\left(h(x)-f(x)\right)\left(h(x)-g(x)\right)=0$$

   για όλα τα x.

(α′) Να αποδείξετε ότι αν η $\mathcal{C}_h$ τέμνει τις $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ σε σημεία με τετμημένες x_1, x_2 τότε

i. $x_1 \neq x_2$

ii. Η εξίσωση $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_1, x_2.

(β′) Να αποδείξετε ότι

- ή θα ισχύει $h(x) = f(x)$ για όλα τα x
- είτε θα ισχύει $h(x) = g(x)$ για όλα τα x

Θεμα 57 Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ για καθε $x \neq 0$.

1. Να βρείτε το $f(0)$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την f.

3. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της f.

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[m]{m}$, $\sqrt[m+1]{m+1}$ όπου ο m είναι ακέραιος μεγαλύτερος του 2.

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-1, 0)$.

Θεμα 58 Για τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$f^2(x) + 1 \leq 2f(x)\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x$$

$$g(x) = x^2 + \eta\mu^2 x + 1 + f^2(x)$$

1. Να βρείτε τις f, g.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Θεμα 59 Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι γνωστό ότι ισχύει

$$|z|^x + |w|^x \geq 2$$

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού zw ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

2. Υποθέτουμε ότι για τον z ισχύει

$$|z + 16| = 4\,|z + 1|$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w.

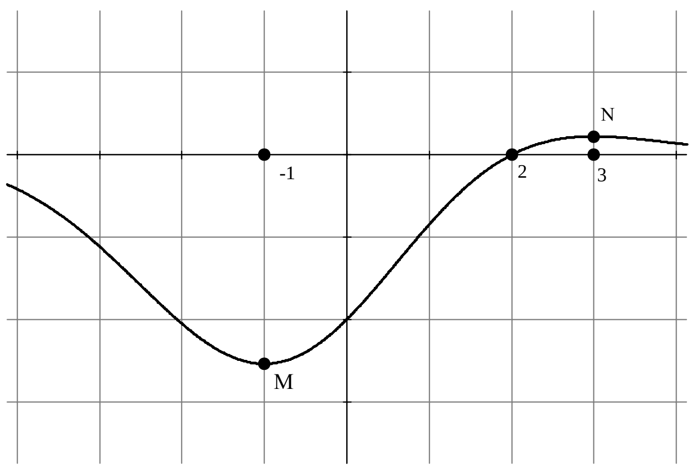
ΘΕΜΑ 60 Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2006$ και για την οποία ισχύει

$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

για όλα τα x,y .

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2006\cdot x\cdot \ln x$.
3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

ΘΕΜΑ 61 Στο σχήμα που ακολουθεί υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-p)\,e^{qx^2+sx}$. Τα σημεία M,N αντιστοιχούν σε θέσεις ακροτάτων.



1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-2)\,e^{-\frac{1}{6}x^2}$.
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$, τον $x'x$ και την ευθεία $x=-1$. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) $E>\int_{-1}^{2}(2-x)\left(1-\frac{x^2}{6}\right)dx$.

   (β′) $E>\frac{33}{8}$

ΘΕΜΑ 62 Έστω ότι

$$w=\frac{z-2i}{iz-4},\qquad |w|=2$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z.
2. Να εξετάσετε αν μπορεί να ισχύει $w=z$
3. Να αποδείξετε ένας τουλάχιστον από τους μιγαδικούς z μπορεί να πάρει τη μορφή

$$z=e^x+i\ln x$$

ΘΕΜΑ 63 Για δύο συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι

- Είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.
- $f'(x) - g'(x) = 1$ για όλα τα x.
- $f'(x) \neq 1$ για όλα τα x.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(g(x)+2\right)^2 + \left(f(x) - x - 2\right)^2\right) = 0$

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$
2. Να βρείτε τις ασυμπτώτους των f, g για $x \to +\infty$.
3. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μία ρίζα.
4. Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = x + 4$ για κάθε x.

ΘΕΜΑ 64 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και:

- $f'''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- $f''(0) = 0$

Να αποδείξετε ότι:

1. Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$ και τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$.
2. Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ με $0 < \alpha < \beta$ ισχύει

$$f\left(a\eta\mu^2\gamma + \beta\sigma\upsilon\nu^2\gamma\right) \leq \eta\mu^2\gamma f(a) + \sigma\upsilon\nu^2\gamma f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 65 Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο συνεχή και γνησίως αύξουσα. Έστω ακόμη ότι $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ έτσι ώστε:
$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x}\left(f'(x) - f'(\xi)\right)$$
2. Έστω η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   (α′) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.
   (β′) Να αποδείξετε ότι αν για μία συνάρτηση $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει
$$h\left(x^{2006} + x^{2007} + x^{2008}\right) = g(x)$$
   για όλα τα $x \geq 0$ τότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 66 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \int_2^x \frac{\ln t}{t+1} dt$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
4. Έστω η συνάρτηση
$$h(x) = (x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$
Να αποδείξετε ότι $h(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$ όπου $c = -2\int_1^2 \frac{\ln t}{t+1}\, dt$.

ΘΕΜΑ 67 1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^p - px, \qquad x \geq 0$$

όπου $0 < p < 1$.

(α′) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 1.

(β′) Να αποδείξετε ότι $x^p - px \leq 1 - p$ για όλα τα x .

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών p, q με $p + q = 1$ και κάθε ζεύγος θετικών πραγματικών αριθμών α, β ισχύει

$$\alpha^p\ \beta^q \leq p\alpha + q\beta$$

ΘΕΜΑ 68 Έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \int_e^{e^{x-1}+\ln x+1} \sqrt{t^2 - 3t + 2}dt$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.
2. Να βρείτε την F'.
3. Να βρείτε τα x για τα οποία ισχύει $F\left(x^2+1\right) \leq F(2x)$.

ΘΕΜΑ 69 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = e^x, \quad \sigma(x) = -x^2 + (2+e)x - 1$$

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, e)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των $\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{C}_\sigma$
2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varphi(x) \geq \sigma(x)$ γι ακάθε x.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{C}_\sigma$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 2$.
4. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$.

Θέμα 70 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(1) = 2006$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα x, y

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$\int_x^{x+m} f(t)\,dt = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt$$
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = f'(0)$.
5. Να βρείτε την f.

Θέμα 71 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και $y = \alpha x + \beta$ η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Έστω

$$g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$$

1. Να αποδείξετε ότι $g(x_0) = 0$
2. Να αποδείξετε ότι $g'(x_0) = 0$
3. Αν επιπλέον η f είναι πολυώνυμο:
   (α′) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $g(x) : (x - x_0)^2$ είναι 0.
   (β′) Το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^2}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Θέμα 72 Έστω S το σύνολο όλων των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$-2 < z^{2006} + \frac{1}{z^{2006}} < 2$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in S$ ισχύει $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in S$ ισχύει $|z| = 1$
3. Να αποδείξετε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ και $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ τότε $z \in S$.

Θέμα 73 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$ να είναι ασύμπτωτη της f για $x \to +\infty$.

1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Έστω $M(x, f(x))$ τυχόν σημείο της $\mathcal{C}_f$ και $d(x)$ η απόσταση του M από την $y = \alpha x + \beta$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$.
3. Να αποδείξετε ότι η εύθεία $y = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $f \circ f$ για $x \to +\infty$.

Θεμα 74 Έστω $f : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση και

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την $g'(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$.

Θεμα 75 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

και το σημεία $A\left(2,\frac{2}{5}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4},\frac{32}{25}\right)$.

1. Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία A, B ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία A, B είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$.
3. Για ένα μιγαδικό αριθμό z είναι γνωστό ότι η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στην $\mathcal{C}_f$. Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του z.

Απαντηση: (γ΄) Αν το πραγματικό μέρος του z είναι x τότε το μέτρο του είναι $|z| = r(x) = \sqrt{x^2+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}$ και $r'(x) = \frac{1}{r(x)\left(1+x^2\right)^3}x(x-1)(x+1)\left(x^4+4x^2+7\right)$. Η ελάχιστη τιμή του μέτρου είναι $\sqrt{2}$.

Θεμα 76 Έστω η συνάρτηση

$$s(x) = x(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της s.
2. Να αποδείξετε ότι αν το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση τη s τότε και το σημείο $N(-\alpha-1,-\beta+1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της s.
3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της s.

Θεμα 77

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι για $\alpha \neq 0$ ισχύει:

$$\int_1^{\alpha} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα

   (α΄) $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$.

   (β΄) $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{(\ln x)^2}{x(1+x^n)}dx$.

ΘΕΜΑ 78 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+1}{x^2-3x+2}$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$.
3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
4. Να υπολογίσετε το $\int_3^4 f(x)\,dx$.
5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$,

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (γ′) $\frac{9}{2} + \ln 3 - 2\ln 2$ (δ′) $(-\infty, 0)$

ΘΕΜΑ 79 Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - e^{-x^2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
2. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f.
3. Έστω
$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x)$$
Να αποδείξετε ότι η $g(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 80

1. Για τις διάφορες τιμές του t να βρείτε το όριο
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{tx^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$
2. Να μελετησετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση
$$f(t) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{tx^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \left| \sqrt{tx^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right|} \right)$$