

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

ΤΑΞΗ Γ΄
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Παράγωγοι

Ασκήσεις



Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΠΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΤΑΞΗ Γ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ,
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Οι σημειώσεις αυτές είναι για σχολική χρήση. Μπορούν να αναπαράχθούν και να διανεμηθούν ελεύθερα αρ-
κεί να μην αλλάξει η μορφή τους. Οι σημειώσεις αυτές αναθεωρούνται τουλάχιστον μία φορά το χρόνο. Για
τον περιορισμό των, αναπόφευκτων λαθών, υπόκεινται σε συνεχείς διορθώσεις. Διανέμονται ως έχουν και ο
συντάκτης τους δε φέρει καμία ευθύνη για τυχόν προβλήματα που ανακύψουν από τη χρήση τους.

28 Ιουνίου 2009

Στοιχειοθετήθηκαν με το L^AT_EX.

1 Παράγωγοι συναρτήσεων

1.1 Α' ΟΜΑΔΑ

1. Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$1. f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1$$

$$4. f(x) = \sqrt{x+x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$2. f(x) = x + \eta \mu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$5. f(x) = x^x, \quad x_0 = 1$$

$$3. f(x) = x \ln x, \quad x_0 = e^2$$

$$6. f(x) = x e^x, \quad x_0 = 0$$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

$$3. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$2. f(x) = \frac{x - e^x}{1 + x \ln x}$$

$$4. f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$1. f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$3. f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

$$2. f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha - x^2}$$

$$4. f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$1. f(x) = \frac{x - e^x}{1 + x \ln x}$$

$$2. g(x) = x + |x^2 - x|$$

5. Από τις εξετάσεις του 1982 (Πανελλήνιες Γ' Λυκείου). Οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζονται παντού σ' αυτό. Επιπλέον είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Να αποδειχθεί ότι αν $\phi'(p) = 0$ τότε είναι $\phi(p) = \frac{f'(p)}{g'(p)}$.

6. Ένα παράδειγμα του Euler. Να αποδείξετε ότι αν

$$f(x) = e^{e^x}$$

τότε

$$f'(x) = e^{e^x} e^x e^x$$

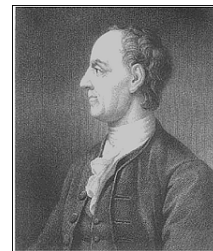
7. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$$1. (f^2(x) g(x))' = 2f(x) f'(x) g(x) + f^2(x) g'(x)$$

$$2. \left(\frac{\sqrt{f^2(x)+1}}{g(x)} \right)' = \frac{f(x)f'(x)g(x) - f^2(x)g'(x) - g'(x)}{g^2(x)\sqrt{f^2(x)+1}}, \quad g(x) \neq 0.$$

$$3. (f^2(x+1) - g^2(x+1))' = 2f(x+1) f'(x+1) - 2g(x+1) g'(x+1)$$

$$4. (f(\ln x) g(x^3))' = \frac{3f(\ln x) g'(x^3) x^3 + f'(\ln x) g(x^3)}{x}$$



Leonhard Euler
1707-1783



$$5. \left(f(x) e^{f(x)} + \ln g(x) \right)' = f(x) e^{f(x)} f'(x) + e^{f(x)} f'(x) + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$g(x) > 0$$

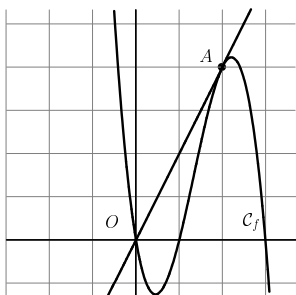
$$6. \left((f(x))^{g(x)} \right)' = (g'(x) f(x) \ln f(x) + f'(x) g(x)) (f(x))^{g(x)-1},$$

$$f(x) > 0$$

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Δείξτε ότι:

$$(f(g(x)))'' = f''(g(x)) (g'(x))^2 + f'(g(x)) g''(x)$$

9. Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, 4)$. Να βρείτε την $f'(2)$.



10. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες και ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) = x^2 + 2x + 4$$

για όλα τα x . Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x) f(x) + g'(x) g(x) = x + 1$$

11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$1. f(x) = x + e^x, x_0 = 1$$

$$3. f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x_0 = 2$$

$$2. f(x) = x^2 + \ln x, x_0 = 1$$

$$4. f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, x_0 = \frac{\pi}{2}$$

12. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) g(x) = x$. Μπορεί η γραφική παράσταση και της f και της g να διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

13. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 45° .

14. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο M στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$1. f(x) = x^2, M(-1, -1)$$

$$2. f(x) = \frac{2}{x}, M(1, 1)$$

$$3. f(x) = x + \frac{1}{x}, M(1, 1)$$



4. $f(x) = x + \sqrt{x}$, $M(1, 2)$

15. Να επαληθεύσετε ότι:

1. Η $f(x) = -x + 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιεί την $f''(x) + f(x) + x = 0$.

2. Η $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1$ ικανοποιεί την $f'(x)x + f''(x)x^2 = 1$.

3. Η $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + e^{-x}$ ικανοποιεί την $f'''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$.

4. Η $f(x) = 2e^x$ ικανοποιεί την $\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 2$.

16. Αν οι συναρτήσεις f, g, h, s είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & s(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h'(x) & s(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h(x) & s'(x) \end{vmatrix}$$

17. Για ποιές τιμές των κ, λ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ \kappa x + \lambda & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο α ;

18. Για ποιές τιμές του α η κλίση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$ στο σημείο $A(0, 1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

19. Ένα παράδειγμα του Newton. Έστω ότι οι α, β είναι σταθερές και ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ συνδέονται με την σχέση:

$$x^3(t) - x(t)y^2(t) + \alpha^2 z(t) - \beta^3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι

$$3x'(t)x^2(t) - x'(t)y^2(t) - 2x(t)y'(t)y(t) + \alpha^2 z'(t) = 0$$

20. Να αποδείξετε ότι η $y = px + q$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σε σημείο με τετμημένη s αν και μόνο αν ισχύει $p = 2\alpha s + \beta$, $q = -\alpha s^2 + \gamma$.

21. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = -3 - \frac{4}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 + 9x - 9)$.

22. (Leibniz, 1710) Έστω $y(x) = u(x)v(x)$ όπου οι u, v είναι 3 φορές παραγωγίσιμες. Να αποδείξετε ότι

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

23. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η ευθεία $y = x + 3$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\alpha x + 3\beta$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.



Sir Isaac Newton
1643-1727



Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646-1716



24. Να επαληθεύσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και ότι οι εφαπτομένες τους σε αυτό το σημείο είναι κάθετες.

25. Να αποδείξετε ότι αν

$$f(x) = 1 - \sin x$$

τότε

$$\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)} \right)' = -\frac{1}{f(x)}$$

26. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R , δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(1) = f''(1) = 1$. Έστω $g(x) = f(e^x)$. Να βρείτε το $g''(0)$.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta x$. Αν $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$ να βρείτε το $f(1)$.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Έστω A, B τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(1, -3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

29. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 4x^2 - 2x + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

στο σημείο της με τετμημένη 1.

30. Έστω $f(x) = \eta\mu(\ln x)$. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$$

31. Έστω $f(x) = \frac{px+1}{1+e^x}$. Να βρείτε για ποια τιμή του p ισχύει $f'(1) + f'(0) = 0$.

1.2 Β' ΟΜΑΔΑ

32. Έστω $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της f :

1. Στο $x_0 = 1$

2. Στο $x_0 = -1$

33. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

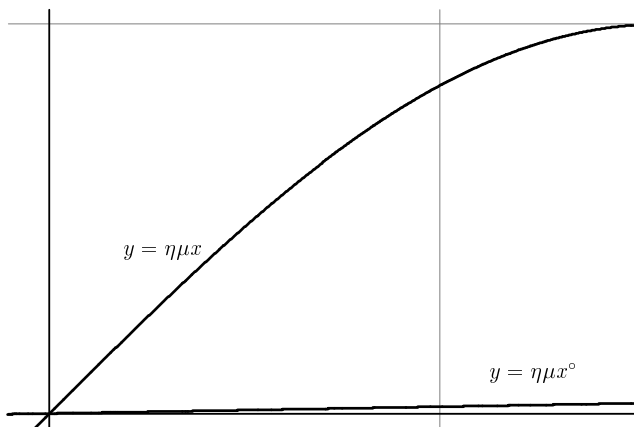
$$x + \eta\mu x \leq f(x) \leq x + \eta\mu x + x^2 e^x$$

Να βρείτε την παράγωγο της στο 0.

34. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω f παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) - f(2x)$ έχει παράγωγο 5 στο $x = 1$ και παράγωγο 7 στο $x = 2$. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) - f(4x)$ στο $x = 1$.

35. Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζεται στο ίδιο σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu x^\circ$ για τιμές του x μεταξύ 0 και 1,5. Η πρώτη συνάρτηση αντιστοιχεί στον αριθμό x (θεωρείται ότι εκφράζει rad) το ημίτονο του. Η δεύτερη συνάρτηση αντιστοιχεί στον αριθμό x το ημίτονο των x μοιρών. Οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι διαφορετικές. Λ.χ. $f(1) = \eta\mu 1 = 0,84$ ενώ $f(1) = \eta\mu 1^\circ = 0,01745$.





1. Να δείξετε ότι $g(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi x}{180}\right)$
 2. Να βρείτε την παράγωγο της $g(x)$
- 36.** Να βρείτε τα α, β αν με $f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}$ είναι $f(1) = 2, f'(1) = 2$.
- 37.** Σε κάθε x αντιστοιχούμε το σημείο $M(x, y)$ της ευθείας $2x + 3y = 1$ με τετμημένη x . Έστω $d(x)$ η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε την παράγωγο της $d(x)$.
- 38.** Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y . Να αποδείξετε ότι αν η f παραγωγίζεται σε ένα x_0 παραγωγίζεται σε κάθε x_0 .
- 39.** Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει

$$f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 40.** Δίνονται οι $f(x) = e^{x^2}$ και $g(x) = e^x \sqrt{1-2x}$. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

- 41.** Έστω $f(x) = 6x^5 - 20x^3$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία όπου η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη είναι συνευθειακά.

- 42.** Έστω το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη 0 είναι η $y = \alpha_1 x + \alpha_0$.

- 43.** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις τότε λέμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις C_f, C_g εφάπτονται αν έχουν κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη. Να αποδείξετε ότι με

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{x^2}{2e}$$

οι C_f, C_g εφάπτονται.

- 44.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



45. Να δώσετε ένα παράδειγμα μίας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που:

1. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από ένα.
2. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από δύο.
3. Να παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός από άπειρα.

46. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη Ι. Στις εξετάσεις του εκείνου του έτους δόθηκε το ακόλουθο θέμα:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α , ώστε να ισχύει

$$g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι

- i) $g(0) = -\alpha$
- ii) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ας ονομάσουμε με (Y) την σχέση της υπόθεσης.

1. Να θέσετε $x = y = 0$ στην (Y) για να δείξετε ότι θα είναι $g(0) = -\alpha$
2. Να παραγωγίσετε την (Y) μία φορά ως προς x και μία φορά ως προς y για να δείξετε ότι θα ισχύει για όλα τα x, y :

$$g'(x+y) = e^y g'(x) + e^x g(y) + y \quad (1)$$

$$g'(x+y) = e^x g'(y) + e^y g(x) + x \quad (2)$$

$$e^y (g'(x) - g(x)) - e^x (g'(y) - g(y)) + (y - x) = 0 \quad (3)$$

Χρησιμοποιείτε τα προηγούμενα για να δείξετε ότι:

$$g(0) = 0 \quad (4)$$

και ότι για όλα τα x, y ισχύει:

$$g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x \quad (5)$$

Ήδη μεταξύ άλλων θα έχετε αποδείξει ότι ζητούσε το θέμα.

3. Με την βοήθεια των $(;);$, $(;);$ δείξετε ότι

$$e^y x - e^x y + y - x = 0 \quad (6)$$

4. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση με τις ιδιότητες που αναφέρονται στο θέμα δεν υπάρχει !

47. Να βρείτε όλες τις παραβολές $y = ax^2 + bx + \gamma$ που εφάπτονται στην ευθεία $y = 3x + 2$ στο σημείο $A(1, 5)$.

48. Έστω $f(x) = e^x$, A σημείο της C_f και B η τομή της εφαπτομένης της C_f στο A με τον xx' . Να αποδειχθεί ότι η προβολή του $\overline{AB}$ στον xx' είναι ένα σταθερό διάστημα.



49. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο συναρτήσεων που δεν παραγωγίζονται στο x_0 αλλά το άθροισμα τους να παραγωγίζεται στο x_0 .

50. Να βρείτε, εφ'όσον υπάρχει, κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των $f(x) = x^3 - 8x - 19$, $g(x) = x^3 + x - 1$.

51. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη.
2. Αν $0 \in \Delta$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη.
3. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x)f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε είναι παραγωγίσιμη.
4. Αν $1 \in \Delta$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε είναι παραγωγίσιμη.

52. Ο αριθμός ρ λέγεται διπλή ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $S(x)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P(x) = (x - \rho)^2 S(x), \quad S(\rho) \neq 0$$

Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές θα έχει τον $\rho \in \mathbb{R}$ διπλή ρίζα αν και μόνο αν ισχύει

$$P(\rho) = P'(\rho) = 0, \quad P''(\rho) \neq 0$$

53. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη I.

1. Έστω ρ πραγματικός αριθμός $A(x)$, $B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε $A(x)B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.
2. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^\nu (\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.

54. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x' .

55. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 5$$

Βρείτε την $f'(0)$.

56. Να αποδείξετε ότι αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^2} = t \in \mathbb{R}$$

τότε η $g(x) = |f(x)|$ παραγωγίζεται στο $x_0 = \alpha$.



57. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 4x^2 - 2x + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

στο σημείο της με τετμημένη 1.

58. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \eta \mu 2x + \beta \eta \mu x + \gamma \sigma \upsilon \nu x$$

Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε να ισχύει

$$f(\pi) = f'(\pi) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

59. Για τις συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο -1 και ότι ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) = x^6 + 2x^3 + 1$$

για όλα τα x .

1. Να βρείτε τα $f(-1), g(-1)$

2. Να αποδείξετε ότι $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}, g'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x+1}$

3. Να αποδείξετε ότι $(f'(-1))^2 + (g'(-1))^2 = 9$.

60. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & , \quad x \in \Delta, x \neq x_0 \\ \alpha & , \quad x = x_0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο x_0

61. Η παρατήρηση του Καραθεοδωρή. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε υπάρχει συνάρτηση $\tilde{f}$ τέτοια ώστε

- Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο x_0
- Για όλα τα x ισχύει $f(x) = f(x_0) + \tilde{f}(x)(x - x_0)$
- $\tilde{f}(x_0) = f'(x_0)$

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το αντίστροφο.

62. Να αποδείξετε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 6x^5 - 20x^3$ στα οποία η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται είναι συνευθειακά.

63. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \rho x$. Να βρείτε τον συντελεστή διευσθύνσεως της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο της του οποίου η τεταγμένη είναι 18.



Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή
1873-1950



64. Πως πρέπει να επιλέξουμε το α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ να διέρχεται από το σημείο $M(2, 9)$;

65. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $y = \frac{\alpha}{x}$ στα σημεία τομής της με την ευθεία $y = \beta x$ είναι παράλληλες.

66. Είναι η ευθεία $y = 2x + 3$ εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = x^3$

67. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2005. Έστω $f(x) = x^3 + ax + b$, με $a \neq b$, για την οποία υποθέτουμε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της στα σημεία με τετμημένες $x = a$ και $x = b$ είναι παράλληλες. Βρείτε το $f(1)$.

68. Μία ευθεία με συντελεστή διευσθύνσεως λ τέμνει την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 . Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2}$.

69. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα, η οποία παίρνει θετικές τιμές και είναι παραγωγίσιμη στο a . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{x - a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

70. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα και x_0 ένα σημείο του διαστήματος αυτού. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε η f λέγεται *αριστερά παραγωγίσιμη* στο x_0 και η τιμή του ορίου *αριστερή παράγωγος* της f στο x_0 . Ανάλογα ορίζεται έννοια της δεξιά παραγωγίσιμης συνάρτησης.

1. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι αριστερά και δεξιά παραγωγίσιμη στο x_0 τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν η αριστερή και η δεξιά παράγωγος τη f είναι ίσες.
2. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι αριστερά και δεξιά παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0 .

71. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \eta \mu \frac{1}{x} - \sigma \nu \nu \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την f' .

72. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .



2. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
3. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

73. Έστω ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής στο x_0 και $\alpha > 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} |x - x_0|^\alpha f(x) & , \quad x \in \Delta, x \neq x_0 \\ 0 & , \quad x = x_0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Δείξτε ακόμη ότι αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ εκτός ίσως του x_0 και $\alpha > 2$ τότε η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 .

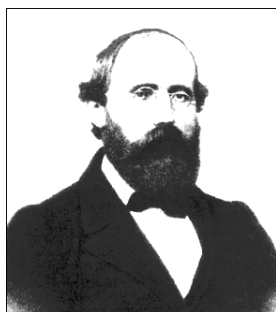
74. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία άρτια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $-x_0$ και ισχύει $f'(-x_0) = -f'(x_0)$. Σε τί απλουστεύεται η απόδειξη αν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$; Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για περιττή συνάρτηση.

75. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω ότι το όριο

$$\hat{f}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (7)$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *παράγωγος Riemann* της f στο x_0 .

1. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε υπάρχει η παράγωγος Riemann της f στο x_0 και ισχύει $\hat{f}(x_0) = f'(x_0)$
2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Να αποδείξετε ότι αν και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει $\hat{f}(0) = 0$.
3. Υποθέτουμε ότι οι παράγωγοι Riemann των f, g υπάρχουν στο x_0 . Να αποδείξετε ότι το αυτό ισχύει για την συνάρτηση $h = f + g$ και ότι $\hat{h}(x_0) = \hat{f}(x_0) + \hat{g}(x_0)$



Georg Friedrich Bernhard
Riemann
1826-1866

76. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Για τα x που δε μηδενίζεται η f' ορίζεται η συνάρτηση:

$$f^*(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

η οποία ονομάζεται *παράγωγος Schwarz* της f .

1. Να βρείτε την f^* όταν $f(x) = e^x$
2. Να βρείτε την f^* όταν $f(x) = x^2 + 1$ και $\Delta = (0, +\infty)$
3. Να αποδείξετε ότι αν για την συνάρτηση g ισχύει $f(x)g(x) = 1$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε θα ισχύει $f^*(x) = g^*(x)$.

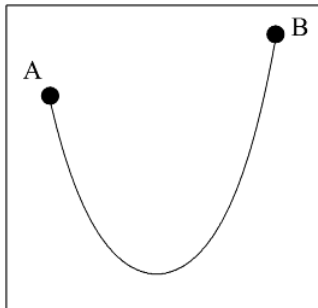


Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

77. Έστω η καμπύλη $\mathcal{C}$ με εξίσωση $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\alpha}$ και η ευθεία $\varepsilon : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ Για την ε είναι γνωστό ότι είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $p + q$.



78. Ο Γαλιλαίος στο έργο του «Διάλογοι περί δύο νέων επιστημών» (1638) υπέδειξε την ακόλουθη μέθοδο για την κατά προσέγγισιν χάραξη μίας παραβολής: Κρεμάμε μία λεπτή αλυσίδα από δύο καρφιά A,B και αποτυπώνουμε το σχήμα της (αλυσσοειδής καμπύλη). Αλλάζοντας το μήκος και τις θέσεις στήριξης θα έχουμε διαφορετικές παραβολές.



50 χρόνια μετά ένας από τους αδελφούς Bernoulli, ο Jacob Bernoulli βρήκε την ακριβή μαθηματική έκφραση της αλυσσοειδούς καμπύλης:

$$y = \frac{c^x + c^{-x}}{2}, \quad c > 0, \quad c \neq 1$$

Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση δε μπορεί να είναι εξίσωση παραβολής.

Δηλαδή να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έτσι ώστε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \frac{c^x + c^{-x}}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

79. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x+y) - f(x) = \alpha x^2 y + \beta x y^2 + \gamma y^3$$

για κάθε x, y (α, β, γ σταθερές). Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη.

80. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο α με $g'(\alpha) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

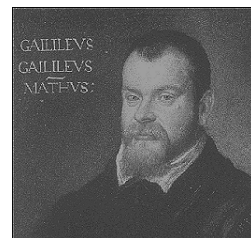
81. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $xf(x)$ έχει παράγωγο στο $x_0 \neq 0$ και η f είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Που χρησιμοποιήσατε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; Είναι αυτή η υπόθεση απαραίτητη;

82. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει ότι $g(-1) = 7$. Αν η f είναι μία συνάρτηση με

$$f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$$

να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.



Galileo Galilei
1564-1642



Jacob (Jacques) Bernoulli
1654-1705



83. Από το σημείο $A(x_0, y_0)$ άγονται οι εφαπτομένες AB, AG προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι x_0, y_0 ώστε να ισχύει $AB = AG$;

84. Αν

$$f(x) = |x^2 - |x||$$

ποια είναι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη -2;

85. Η παράγωγος της f είναι γνωστή.

Ποια είναι η παράγωγος της $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x)$;

86. Είναι γνωστό ότι για $x \neq 1$ ισχύει

$$1 + x + x^2 + \dots + x^\nu = \frac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}$$

Βάσει τούτου να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + \nu x^{\nu-1}$$

87. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$ είναι η ευθεία $\frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1$.

88. Βρείτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = e^{kx}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

89. Για ποιές τιμές των κ, λ, μ οι γραφικές των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$$

$$g(x) = x^3 + \mu x$$

έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 3)$;

90. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $g(x) = \log_2 x$ στα σημεία τους $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ τέμνονται κάθετα.

1.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

91. Έστω f μία συνάρτηση που είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και της οποίας οι παράγωγοι παίρνουν θετικές τιμές. Έστω $u(x) = (f'(x))^{-\frac{1}{2}}$ και $v(x) = f(x)(f'(x))^{-\frac{1}{2}}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{u(x)}u''(x) - \frac{1}{v(x)}v''(x) = 0$$

92. Έστω $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Να αποδείξετε ότι για την νι-οστή παράγωγο της f ισχύει

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} (-1)^\nu \nu! \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{-\nu-1}$$

2 Ο ρυθμός μεταβολής

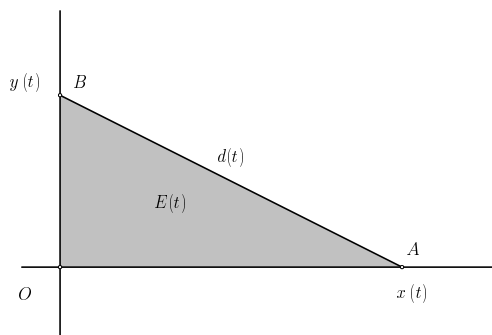
2.1 Α' ΟΜΑΔΑ

93. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του y ως προς x όταν:



1. $2x + 3y = 4$
2. $xy = 3$
3. $x^2 + y^2 = 4, y > 0$
4. $e^x + e^y = 1$
5. $\ln x + \ln y = 1$
6. $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 2, y > 0$

94. Τα σημεία A, B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και η θέση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $A(x(t), 0), B(0, y(t))$.



1. Έστω ότι $x(t) = 3t, y(t) = 4t$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους $d(t) = AB$ και του εμβαδού $E(t) = (OAB)$.
2. Να κάνετε τον ίδιο υπολογισμό γενικά δηλαδή όταν δεν ξέρετε τις συναρτήσεις $x(t), y(t)$. (Στο τελικό αποτέλεσμα θα υπάρχουν οι $x(t), y(t)$ και οι παράγωγοι τους $x'(t), y'(t)$).

95. Η θέση ενός κινητού στο επίπεδο είναι το σημείο

$$M(x(t), y(t))$$

όπου οι $x(t), y(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ποια σχέση συνδέει τα $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ όταν:

1. Το κινητό κινείται στον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 10$$

2. Το κινητό κινείται στην ευθεία $x + y = 10$.

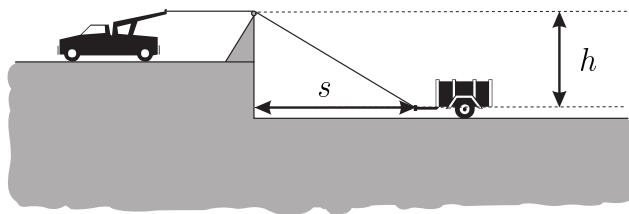
3. Το κινητό κινείται στην ευθεία στην καμπύλη με εξίσωση

$$e^x + e^y = 10$$

2.2 Β' ΟΜΑΔΑ

96. Να βρείτε ποια σχέση συνδέει την ταχύτητα του αυτοκινήτου και του ρυμουλκουμένου κατά την χρονική στιγμή που το δεύτερο απέχει απόσταση s από τον τοίχο.





97. Ένα υλικό σημείο κινείται στον άξονα xx' έτσι ώστε για κάθε χρονική στιγμή t η θέση του είναι

$$s(t) = \sqrt{k^2 t^2 + c^2}$$

όπου k, c είναι θετικές σταθερές. Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του $v(t)$:

1. Είναι μικρότερη του k .
2. Τείνει στο k όταν $t \rightarrow +\infty$.

98. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη I. Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους $10m$ του οποίου τα άκρα A, B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2m/sec$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = vt, t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

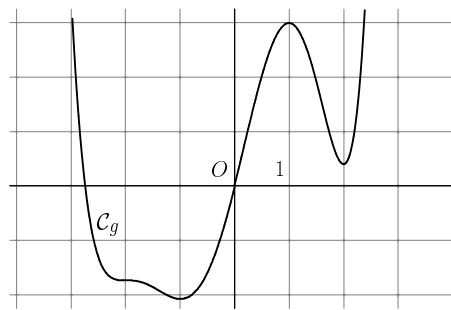
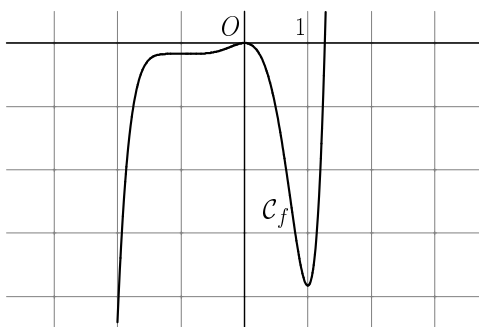
1. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι $6m$;

99. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη I. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g . Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

3 Τα θεωρήματα Fermat, Rolle, Lagrange

3.1 Α' ΟΜΑΔΑ

100. Στα επόμενα σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, g . Βρείτε σε ποια σημεία μηδενίζεται η παράγωγος τους και ποιά από αυτά είναι τοπικά ακρότατα.



101. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να γράψετε ένα κατάλογο πιθανών θέσεων ακροτάτων σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat.

$$1. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \ln(x+1)$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$5. f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x$$

$$3. f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

$$6. f(x) = \ln x - x + \ln(x+1)$$

102. Αφού ελέγξετε στις επόμενες περιπτώσεις, ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle να βρείτε τα ξ που μηδενίζουν την f' .

$$1. f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$$

$$2. f: [-3, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$3. f: [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$4. f: [0, \ln 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2,$$

$$5. f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - x$$

$$6. f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \ln x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

103. Αφού ελέγξετε στις επόμενες περιπτώσεις, ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange να βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

$$1. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$$

$$2. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$$

$$3. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

$$4. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - x$$

$$5. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$

$$6. f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$$

104. Από τις εξετάσεις *Mathematical Tripos, Cambridge, 1935*. Να βρείτε το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$ στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$.

3.2 Β' ΟΜΑΔΑ

105. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο της.

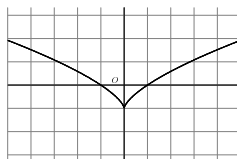
2. Να εφαρμόσετε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$



106. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες τότε θα έχουν τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη.

107. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση των σημείων $M(x, y)$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$(y + 1)^3 = x^2 \quad (1)$$



1. Η σχέση (1) ορίζει μία συνάρτηση $y = f(x)$. Να βρείτε τον τύπο της.
2. Να βρείτε σε ποια x_0 παραγωγίζεται η f .
3. Στα άκρα κάθε διαστήματος της μορφής $[-\alpha, \alpha]$ η f παίρνει ίσες τιμές. Εντούτοις δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον xx' . (Να ελέγξετε αυτό τον ισχυρισμό εξετάζοντας αν η f' μηδενίζεται). Έρχεται το παραπάνω σε αντίθεση με το θεώρημα του Rolle;

108. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ τέτοιες ώστε:

- $f(0) = g(1) = 0$
- $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$$

109. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Δελχί, 1984. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει k τέτοιος ώστε η εξίσωση $x^3 - 12x + k = 0$ να έχει δύο διάφορες ρίζες στο $(0, 1)$.

110. Από τις εξετάσεις Mathematical Tripos, Cambridge, 1929. Να αποδείξετε ότι αν

$$\frac{\alpha_0}{n+1} + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \alpha_n = 0,$$

τότε η εξίσωση

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

111. Έστω $f(x) = x \ln x$ και αριθμοί α, β με $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι ο αριθμός

$$\xi = \frac{1}{e} \frac{\beta^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}$$



112. Έστω $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f έχει ακριβώς τρεις ρίζες που ανήκουν στο διάστημα $(0, 3)$.

113. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 1 = (e-1)x^2$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες τις δύο προφανείς και ακόμη μία στο διάστημα $(2, 3)$.

114. Να αποδείξετε ότι αν η παράγωγος μίας συνάρτησης ορισμένης σε ένα διάστημα δε έχει ρίζες τότε η συνάρτηση είναι 1-1.

115. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέση I. Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί:

1. Ότι για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.
2. Αν $c \notin [\alpha, \beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

116. Στηριχθείτε στο θεώρημα του Rolle όπως διατυπώνεται στο βιβλίο σας για να αποδείξετε την ακόλουθη γενίκευση του:

- Έστω μία συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = L$$

όπου $L \in \mathbb{R}$ ή $L = \pm\infty$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Στη συνέχεια:

1. Σκεφθείτε πως άραγε θα μπορούσε να αποδειχθεί το θεώρημα του Rolle όπως διατυπώνεται στο βιβλίο ξεκινώντας από την παραπάνω γενίκευση.
2. Σκεφθείτε πως θα μπορούσαμε στην γενίκευση να συμπεριλάβουμε και διαστήματα όπου κάποιο από τα άκρα είναι $\pm\infty$.

117. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu$$

με μ, ν θετικούς ακεραίους και $x \in [\alpha, \beta]$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{\mu}{x-\alpha} + \frac{\nu}{x-\beta} \right)$$

2. Αφού επαληθεύσετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle να αποδείξετε ότι το ξ που μηδενίζει την f' είναι το

$$\xi = \frac{\nu}{\mu+\nu}\alpha + \frac{\mu}{\mu+\nu}\beta$$

118. Έστω ότι η παράγωγίσιμη συνάρτηση f έχει στο διάστημα Δ τουλάχιστον ν ρίζες. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $(f^2(x))'$ έχει τουλάχιστον $2\nu - 1$ ρίζες.



119. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη Ι. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

120. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι.

1. Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.
2. Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sin x$ και $g'(0) = 1992$.

121. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Δίνονται ο πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$f' = g, \quad g' = -f$$

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$f'' + f = g'' + g = 0$$

και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.

122. Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η παράγωγος της g δε μηδενίζεται και ότι $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

123. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

124. Έστω f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ για τις οποίες ισχύει

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$$

για όλα τα x . Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ριζών της f υπάρχει ρίζα της g .

125. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, κατά περίπτωση, $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε:

1. $f(\beta)e^{\beta-\xi} - f(\alpha)e^{\alpha-\xi} = (\beta - \alpha)(f(\xi) + f'(\xi))$
2. $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta}$ όπου $f(x) \neq 0$ στο (α, β)



Augustin Louis Cauchy
1789-1857



ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

1. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής στην $f(x)e^x$
2. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στην $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$

126. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν οι f και f' είναι άρτιες συναρτήσεις τότε η f είναι σταθερή.

127. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Δελχί, 1989. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και η παράγωγος της είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 f''(\xi)$$

3.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

128. Υποθέτουμε ότι οι $c_1, c_2, \dots, c_n$ είναι ανα διάφοροι του 0 και οι αριθμοί $t_1, f_2, \dots, t_n$ είναι ανα δύο διάφοροι. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2} + \dots + c_n x^{t_n} = 0$$

έχει το πολύ n ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

129. Το θεώρημα του Taylor. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0 + h) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(t) (x_0 + h - t)^i, \quad t \in \Delta$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x_0 + h - t)^{n-1}$$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x_0 + h - t}{h} \right)^n F(x_0)$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$G(x_0 + h) = G(x_0) = 0$$

3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(x_0) h + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) h^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) h^n$$

(Τύπος του Taylor)

4. Να εφαρμοσθεί το προηγούμενο για να αποδειχθεί ότι υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του $x \neq 0$ έτσι ώστε

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n e^\xi$$



Brook Taylor
1685-1731



4 Ο ρόλος της πρώτης παραγώγου

4.1 Α' ΟΜΑΔΑ

130. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$

2. $f(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + x - 1$

3. $f(x) = 2x^3 + 6e^x + e$

4. $f(x) = -3e^{-x} - e^{-x}x^2 - 2xe^{-x}$

131. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες.

1. $f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 1$

2. $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 8x + 1$

3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 \ln|x-1| - 1$

4. $f(x) = \frac{x^8-1}{4x^4}$

132. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, 6]$

133. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

134. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ στο διάστημα $[0, 2]$.

135. Έστω η συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

136. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \quad x \in [-1, 3]$$

να βρείτε το σύνολο τιμών της.

137. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ισχύει $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$.

138. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [\frac{3}{4}, 2]$ ισχύει $1 \leq \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}} \leq \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

139. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+3}$;

140. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει $\sin x \sqrt{\eta \mu x} \leq 2^{\frac{1}{2}} 3^{-\frac{3}{4}}$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Με $f(x) = \sin x \sqrt{\eta \mu x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ είναι $f'(x) = \frac{3\sigma\upsilon^2\eta\mu x - 2}{2\sqrt{\eta \mu x}}$. Βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f .



141. Να αποδείξετε ότι για όλες τις πραγματικές τιμές του x ισχύει

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

142. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 10 + 4x \ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}$$

143. Από τις εξετάσεις του 1980.

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $y = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = -2$
2. Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης, αφού αντικατασταθούν τα α, β με τις τιμές τους.

144. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2x^2+2}$.

4.2 Β' ΟΜΑΔΑ

145. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για όλα τα x . Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστη τιμή. Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα αν αντί του $\mathbb{R}$ έχουμε ένα ανοικτό διάστημα Δ . Ένα κλειστό;

146. Να βρείτε σημείο στην γραφική παράσταση της $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $A(0, 1)$ ελάχιστη απόσταση.

147. Δύο θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με 50. Πότε το άθροισμα τους γίνεται μέγιστο;

148. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ όπου το Δ είναι ένα ανοικτό διάστημα. Έστω A ένα σημείο του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν ένα σημείο B της C_f απέχει από το A ελάχιστη απόσταση τότε η εφαπτομένη της C_f στο B είναι κάθετη στην AB .

149. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = px$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του p οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε δύο σημεία A, B .
2. Να εκφράσετε την απόσταση AB ως συνάρτηση του p .
3. Να βρείτε για ποια τιμή του p η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη.

150. Μία εταιρεία σταματά κάθε διαφήμιση προϊόντων της. Διαπιστώθηκε ότι οι πωλήσεις των προϊόντων της άρχισαν να πέφτουν και πιο συγκεκριμένα ότι: Ο ρυθμός πτώσης των πωλήσεων και οι πωλήσεις κατά οποιαδήποτε χρονική στιγμή t έχουν σταθερό λόγο.

Την στιγμή που σταμάτησε η διαφήμιση η επιχείρηση πωλούσε 500 μονάδες προϊόντος την ημέρα. Μετά από 20 ημέρες οι πωλήσεις έπεσαν στις 300 μονάδες. Πόσες θα είναι οι πωλήσεις μετά από 30 ημέρες.



151. Ο πληθυσμός Π των κατοίκων μίας πόλης αυξάνεται ως προς τον χρόνο με ρυθμό

$$\left(\frac{1}{10} \ln \frac{5}{4}\right) \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{10}} \Pi_0$$

όπου Π_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης κατά την χρονική στιγμή $t = 0$. Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα είναι $e\Pi_0$;

152. Η κάθε σελίδα ενός βιβλίου πρέπει να έχει

- Κείμενο-εικόνες εμβαδού S
- Αριστερά-Δεξιά περιθώριο α
- Άνω-Κάτω περιθώριο β

Πως πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις της σελίδας έτσι ώστε να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν;

153. Θεωρούμε θετικούς αριθμούς x, y με άθροισμα k και m, n θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης $x^m y^n$ είναι ίση με $\frac{m^m n^n k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$.

154. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (1+x)^n + (1-x^n)$, όπου n θετικός ακέραιος.

155. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

1. $\eta \mu x < 2x, x > 0$
2. $\eta \mu x > x - \frac{x^3}{3}, x > 0$

156. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

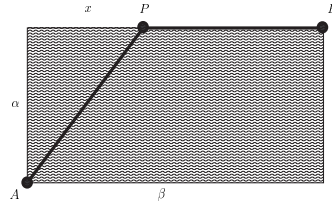
157. Στις επόμενες περιπτώσεις τα x, y είναι θετικοί αριθμοί και μεταβάλλονται έτσι ώστε να ικανοποιείται μία σχέση. Ζητείται να εξετάσετε αν η παρατιθέμενη παράσταση των x, y παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

Συνθήκη	Παράσταση
$x + y = \alpha$	xy
$xy = \alpha$	$x + y$
$x + y = \alpha$	$x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 = \alpha$	$x + y$
$x^2 + y^2 = \alpha$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \alpha$	$x + y$

158. Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έχει συνεχή παράγωγο και δεν έχει ακρότατα. Να αποδείξετε ότι είναι μονότονη.

159. Στο σχήμα απεικονίζεται μία τεχνητή λίμνη σχήματος ορθογωνίου.





Ένας αθλητής ο οποίος μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα v_1 και να τρέξει με ταχύτητα v_2 πρόκειται να μετακινηθεί από το A στο B . Πως πρέπει να επιλεγεί η διαδρομή APB ώστε να απαιτηθεί ο ελάχιστος χρόνος;

160. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = (1+x)^x$$

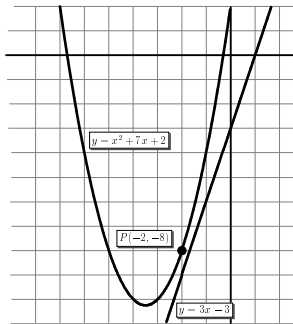
1. Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}_g$
2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_g$ ισχύει

$$(1+x)^x \geq 1$$

161. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1996. Να αποδείξετε ότι για τη θετική σταθερά t ισχύει η ισοδυναμία:

$$e^x > x^t \text{ για όλα τα } x > 0 \Leftrightarrow t < e$$

162. Ποιο σημείο της καμπύλης $y = x^2 + 7x + 2$ είναι πλησιέστερα στην ευθεία $y = 3x - 3$;



163. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha(\ln x + x) + 2\beta x^2 + 3x + 1$$

παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1, x_2 = 2$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

164. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-1, +\infty), n \in [1, +\infty)$ ισχύει η ανισότητα του Bernoulli:

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$$



165. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

1. η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ'ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$
2. υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

3. υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

166. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ότι ισχύει

$$2f(x) = x(1 + f'(x))$$

για όλα τα x . Να αποδείξετε ότι η f'' είναι σταθερή. (Προσέξτε ιδιαίτερα την τιμή $x = 0$). Αν επιπλέον $f(1) = 2$ βρείτε την f .

167. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη IV. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 182$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in [0, +\infty)$.

168. Από τις εξετάσεις του 2000, Θετική Κατεύθυνση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ'έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

1. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .
2. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

169. Να λύσετε την εξίσωση

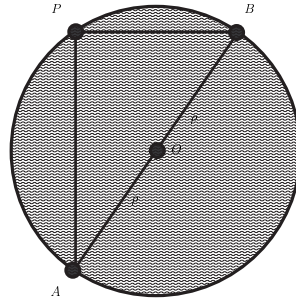
$$9^x + 3^x = 5^x + 7^x$$

170. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη I. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$$



171. Να λύσετε το πρόβλημα ;; στην περίπτωση που η λίμνη έχει σχήμα κύκλου ακτίνας ρ και τα A, B είναι αντιδιαμετρικά.



172. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$;

173. Πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 4x + 1$;

174. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

στο διάστημα $(0, 1)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

175. Έστω

$$f(x) = x^2 e^x - 2$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(x) = f(x) + 2xe^x + 2$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$
4. Η f' έχει δύο μόνο ρίζες.
5. Η f έχει στο $\mathbb{R}$ μία μόνο ρίζα.

176. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^\lambda e^{2\lambda - x}$$

με $\lambda > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι

$$(\lambda e)^\lambda$$

2. Πως πρέπει να εκλεγεί ο λ έτσι ώστε η μέγιστη τιμή της f να είναι η ελάχιστη δυνατή;

177. Έστω

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{x^2}$$

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.



2. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^x \sqrt[3]{x^2} - \lambda = 0$$

178. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \lambda$$

179. Να αποδείξετε ότι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα

$$f' + f = 0$$

είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = ce^{-x}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

180. Από τις εξετάσεις του 1984, Δέσμη IV. Έστω η πραγματική συνάρτηση y της πραγματικής μεταβλητής x με $y = x + \frac{4}{x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της y .
2. Να εξετάσετε την y ως προς τη μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$.

181. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε η f' έχει δύο μόνο ρίζες x_1, x_2 με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$.

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[\alpha, x_1], [x_1, x_2], [x_2, \beta]$$

η f έχει το πολύ μία ρίζα.

2. Να αποδείξετε ότι αν το x_1 είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $[\alpha, x_1] \cup (x_1, x_2]$. (Όμοια αν το x_2 είναι ρίζα της f τότε f δεν έχει ρίζα στο $[x_1, x_2] \cup (x_2, \beta]$)
3. Να αποδείξετε ότι αν το α είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $(\alpha, x_1]$ (Όμοια αν το β είναι ρίζα της f τότε η f δεν έχει ρίζα στο $[x_2, \beta)$)
4. Να αποδείξετε ότι η f έχει ρίζα στο (α, x_1) αν και μόνο αν

$$f(\alpha)f(x_1) < 0$$

182. Να βρείτε πόσες ρίζες της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ ανήκουν στο διάστημα $[-2, 3]$.

183. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών α, β και για κάθε θετικό πραγματικό $r > 1$ ισχύει:

$$|\alpha + \beta|^r \leq 2^{r-1} (|\alpha|^r + |\beta|^r)$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να εξετάσετε χωριστά την τετριμμένη περίπτωση όπου $\beta = 0$. Με $\beta \neq 0$, λόγω της τριγωνικής ανισότητας αρκεί να αποδείξουμε ότι $2^{r-1} \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^r + 1 \right) - \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + 1 \right)^r \geq 0$. Εργασθείτε με την συνάρτηση $f(x) = 2^{r-1}(x^r + 1) - (x + 1)^r$, $x \geq 0$.



184. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί με μεθόδους της Άλγεβρας (μην επιχειρήσετε να το αποδείξετε) ότι εξίσωση

$$2x^5 - 5x^4 + 5 = 0 \quad (E)$$

δεν επιλύεται (δηλαδή δεν είναι δυνατό να βρούμε τύπους που να παρέχουν τις ρίζες της με χρήση των τεσσάρων πράξεων και εξαγωγή ριζών). Να αποδείξετε ότι η (E) έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

185. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sin x = x$.

186. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x = x - 1$.

187. Να αποδείξετε ότι

$$1. \quad x^2 - x > x \ln x > x - 1$$

$$2. \quad x^2 - 1 > 2x \ln x > 2(x - 1), \quad x > 1$$

188. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέση IV. Να αποδείξετε ότι

$$\ln(x + 1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$$

για κάθε $x \in [1, +\infty)$

189. Να αποδείξετε ότι η

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

190. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + \ln x + x^{2001} + 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f \circ g$.

191. Να λύσετε την εξίσωση

$$\lim_{x \rightarrow y} 2^{e^x - y - 1} = 1$$

192. Να αποδείξετε ότι για $\alpha > 1$ η συνάρτηση

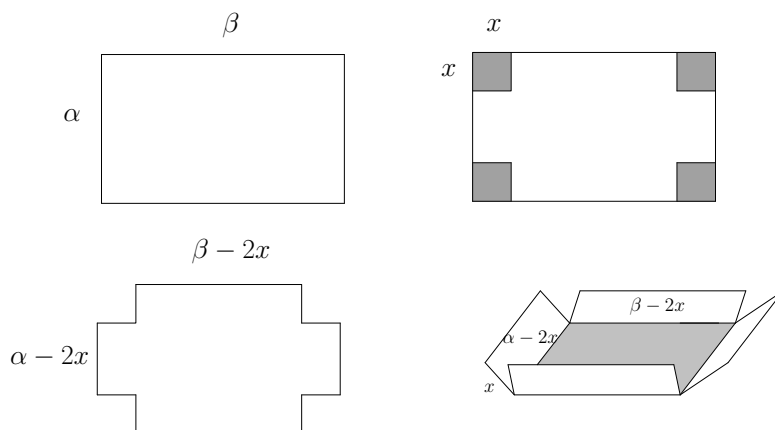
$$\varphi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x^2 + \alpha^2}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

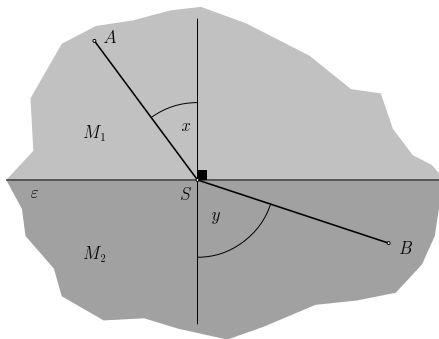
193. Από το διαγωνισμό Putnam, 1948. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του $|z^3 - z + 2|$ όταν z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z| = 1$;

194. Ένα κομμάτι χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις $\alpha < \beta$. Από αυτό αποκόπτουμε τέσσερα τετράγωνα πλευράς x (βλέπε σχήμα) και κατασκευάζουμε ένα κουτί ανοικτό επάνω. Πως πρέπει να επιλεγεί το x ώστε το κουτί να έχει την μέγιστη δυνατή χωρητικότητα;





195. Η αρχή του Fermat. Ένα κινητό μπορεί να κινηθεί στο μέσο M_1 με ταχύτητα v_1 και στο μέσο M_2 με ταχύτητα v_2 . Τα δύο μέσα διαχωρίζονται από την ευθεία ε .



Να αποδείξετε ότι αν κινηθεί από το A στο B κατά τη διαδρομή ASB ο χρόνος κίνησης θα είναι ελάχιστος εφόσον το σημείο S επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y} = \frac{v_1}{v_2}$$



Pierre Fermat
1601-1665

196. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \lambda x^3 + x^2 + (1 - 3\lambda)x + 2\lambda - 2$$

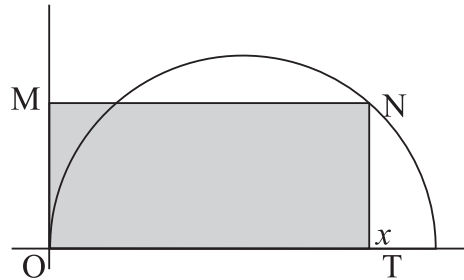
1. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο λ η γραφική παράσταση της $f(x)$ διέρχεται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να προσδιορίσετε.
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

197. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1977 και 1982. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ και ότι $f(x_0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > f(x_0)$ για όλα τα $x > x_0$. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Εργασθείτε με την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.



198. Μία συνάρτηση, ορισμένη σε κλειστό διάστημα, μηδενίζεται στα άκρα του και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση παίρνει μία θετική τιμή τότε θα υπάρχει έσωτερικό σημείο του διαστήματος όπου η δεύτερη παράγωγος της θα είναι αρνητική.

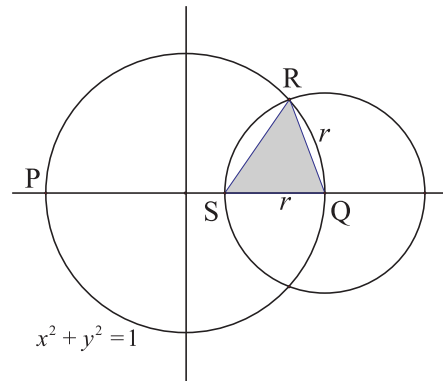
199. Ένα πρόβλημα του *Johann Bernoulli*. Το ημικύκλιο του σχήματος έχει διάμετρο 1 και το M είναι μεταβλητό σημείο του. Να βρεθεί το x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου OMNT να είναι μέγιστο.



Johann Bernoulli
1667 - 1748

200. Από τις εξετάσεις *I.I.T*, *Ινδία*, 1994. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ τέμνει τον x -άξονα στα P, Q.

Ένας άλλος κύκλος με κέντρο το Q και μεταβλητή ακτίνα, τέμνει τον πρώτο κύκλο, πάνω από τον x -άξονα στο R και το ευθύγραμμο τμήμα PQ στο S. Να βρείτε το μέγιστο του εμβαδού του τριγώνου QSR.



201. Από τις εξετάσεις του *Πανεπιστημίου του Berkeley*, 1987. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

όπου a θετικός έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να ονομάσετε $f(x) = ae^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$. Η περίπτωση όπου $a \geq 1$ είναι εύκολη διότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Η περίπτωση όπου $0 < a < 1$ θέλει μεγαλύτερη προσοχή. Στην περίπτωση αυτή η f' έχει δύο ρίζες. Δείτε τι τιμές παίρνει η f σε αυτές τις ρίζες.

202. Από το μαθηματικό διαγωνισμό *Harvard-MIT*, 2000. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

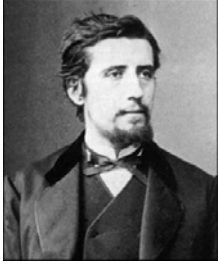
$$f(x) + f'(x) \leq 1$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $f(1)$; (Υπόδειξη¹: Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $e^x f(x)$.)

¹ Η υπόδειξη δόθηκε στους διαγωνιζόμενους



4.3 Γ' ΟΜΑΔΑ



Jean Gaston Darboux
1842-1917



Edmund Landau
1877-1950

203. Το Θεώρημα του Darboux. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος f' της f έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή κάθε αριθμός y μεταξύ δύο τιμών $y_1 = f'(x_1)$, $y_2 = f'(x_2)$ είναι τιμή της f' .

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Εργασθείτε με την περίπτωση που $x_1 < x_2$, $y_1 < y < y_2$ (Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ανάλογα). Έστω $g(x) = f(x) - y(x - x_1)$. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και επομένως έχει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in [x_1, x_2]$. Δείξτε ότι αυτό το x_0 θα πρέπει να είναι εσωτερικό του διαστήματος $[x_1, x_2]$. Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Fermat για να συμπεράνετε ότι θα είναι $f'(x_0) = y$.

204. Η ανισότητα του Cauchy. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι n μη αρνητικοί αριθμοί τότε ισχύει

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n}$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n . Υποθέστε ότι το αποδεικτέο ισχύει για n και για να αποδείξετε ότι ισχύει για $n + 1$ να εργασθείτε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + x}{n+1} - \sqrt[n+1]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \cdot x}$

205. Η ανισότητα του Landau. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία για όλα τα x ισχύουν:

- $|f(x)| \leq A$
- $|f''(x)| \leq B$

Να αποδειχθεί ότι για όλα τα x ισχύει

- $|f'(x)| \leq A + B$

206. Έστω $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)|^\alpha \leq |x - y|$$

για όλα τα x, y . Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

5 Ο ρόλος της δεύτερης παραγώγου

5.1 Α' ΟΜΑΔΑ

207. Να αποδείξετε ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση f στρέφει τα κυρτά προς τα κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2$ | 4. $f(x) = 12x^2 + 12x + 12$ |
| 2. $f(x) = e^x$ | 5. $f(x) = x - \sqrt{x}$ |
| 3. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ | 6. $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ |

208. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι κυρτή ή κοίλη:



1. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$
2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x + x$
4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \eta \mu x$
6. $f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{12}x^4$

209. Να βρείτε τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18$
2. $f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 1$
3. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$
4. $f(x) = 12x^2 e^x - 84x e^x + 168e^x - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 1$
5. $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$
6. $f(x) = e^{x-x^2}$

5.2 Β' ΟΜΑΔΑ

210. Για ποιές τιμές του α ή συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4\alpha x^3 + 8x^2 + 20$$

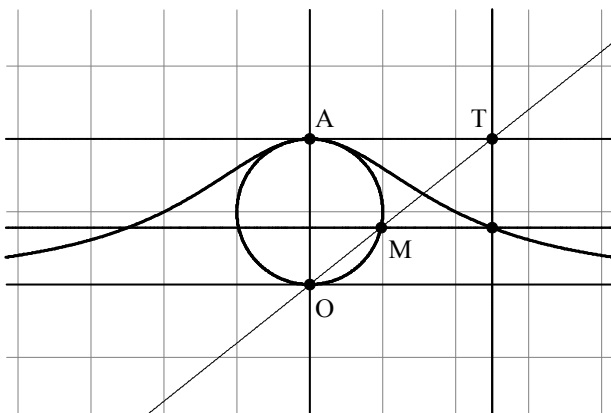
στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε όλο το $\mathbb{R}$;

211. Το σημείο $A(1, 3)$ είναι σημείο καμπής της

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$$

Βρείτε τα α, β .

212. Η “μάγισσα”² της Agnesi Έστω ο κύκλος με διάμετρο OA όπου O είναι η αρχή των αξόνων και $A(0, \alpha), \alpha > 0$. Σε κάθε σημείο $T(x, \alpha)$ της ευθείας $y = \alpha$ αντιστοιχούμε το σημείο τομής M της ευθείας OT με την κύκλο. Έστω y η τεταγμένη του M . Ορίζεται τότε μία συνάρτηση $y = f(x)$.



²versiera από το λατινικό *vertere* που σημαίνει “στρέφω”. Ωστόσο *versiera* ήταν και συντόμευση της λέξης *anversiera* που σημαίνει και “μάγισσα”. Από ένα μεταφραστικό λάθος στα Αγγλικά αποδόθηκε ως *witch* και έτσι έμεινε στην βιβλιογραφία.



Maria Gaetana Agnesi
1718 - 1799



1. Να βρεθεί ο τύπος της f
2. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f

213. Από τις εξετάσεις του 1985, Δέσμη I. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x-3)+4$, για $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε x_1, x_2 τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

214. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη I.

1. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$.
2. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

215. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

έχει τρία συνευθειακά σημεία καμπής.

216. Έστω ότι η f είναι ορισμένη και δύο φορές παράγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ότι $f(\alpha) = f(\beta) = m$ και $f''(x) < 0$ για όλα τα x . Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq m$ για όλα τα x .

217. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

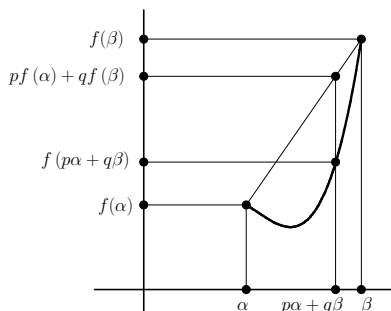
218. 1. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

(α') Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

(β') Γενικότερα να αποδείξετε ότι αν $p > 0, q > 0$ με $p + q = 1$ τότε ισχύει

$$f(p\alpha + q\beta) < pf(\alpha) + qf(\beta)$$



(γ') Πως θα διατυπώνονταν οι ανισότητες των προηγούμενων ερωτημάτων αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$;

2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

$$(\alpha') e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{e^\alpha + e^\beta}{2}, \quad (\alpha < \beta)$$

$$(\beta') \left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \right)^\nu \leq \frac{|\alpha|^\nu + |\beta|^\nu}{2}$$

$$(\gamma') \eta\mu\left(\frac{13}{31}x + \frac{18}{31}y\right) > \frac{13}{31}\eta\mu x + \frac{18}{31}\eta\mu y \quad 0 < x < y < \pi$$

219. Από τις εξετάσεις του 1986, Δέσμη I. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7 \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του α , να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f .

220. Από τις εξετάσεις του 2003. Στις εξετάσεις του έτους 2003 δόθηκε το ακόλουθο θέμα:

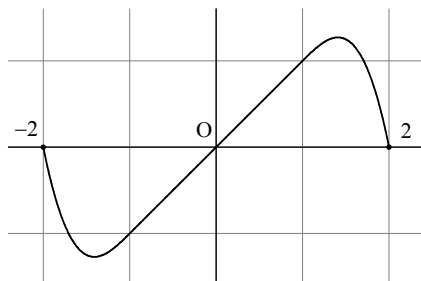
Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .
2. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Αφού διαβάσετε τα σχετικά με το σημείο καμπής από το βιβλίο σας:

1. Να απαντήσετε τα δύο πρώτα ερωτήματα.
2. Να θεωρήσετε την συνάρτηση $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 6x^2 - 5x - 2 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ x & , \quad -1 < x < 1 \\ -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



και στη συνέχεια:



(α') Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2 - 12x - 5 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ -6x^2 + 12x - 5 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(β')

$$f''(x) = \begin{cases} -12x - 12 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & , \quad -1 < x < 1 \\ -12x + 12 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(γ') Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

3. Από το β') συνάγεται ότι το ερώτημα γ') του θέματος είναι λάθος. Γιατί;

221. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη I Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή $\mathbb{R}$.
2. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

222. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη I.

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.
2. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$$

223. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha \neq 0$ και $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι

1. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο x_1 , τοπικό μέγιστο σε κάποιο x_2 και καμπή σε κάποιο x_3 .
2. Δείξτε ότι $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι μέσο του τμήματος με άκρα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: (για το (β')) Δείξτε πρώτα ότι

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2(3\alpha(x_1 + x_2) + 2\beta)$$

224. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη I. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι



1. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και
2. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: (για το (β')) Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $\ln g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \ln \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ ή ισοδύναμα ότι $\ln g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \ln g(x_1) + \frac{1}{2} \ln g(x_2)$. Μπορείτε να εργασθείτε όπως στην άσκηση ;; με τη συνάρτηση $f(x) = \ln g(x)$.

225. 1. Έστω $f: [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με παράγωγο γνησίως αύξουσα και θετική στο α . Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δε μπορεί να είναι κυρτή.

5.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

226. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f''(x) > 0$ για όλα τα x τότε για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in \Delta$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu \in [0, 1]$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = 1$ ισχύει

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_\nu x_\nu) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_\nu f(x_\nu)$$

6 Οι κανόνες Bernoulli-De l' Hospital

6.1 Α' ΟΜΑΔΑ

227. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- | | |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{-x} + x - 1}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^\alpha - 1}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^2}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 + x - 10}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\alpha x)}{\eta \mu(\beta x)}$ |

228. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x-1}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) + \ln(x+2)}{\ln(x+3) + \ln(x+4)}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2 + 1)}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{2x+1} - 1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x) - x}{\ln(2-x) - 2x}$ |

229. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$
7. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \varepsilon \varphi x$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^x$

230. Βρείτε το όριο

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu (\theta \sin \theta)}{\sin (\theta \eta \mu \theta)}$$

231. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2006. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1 - x}{\eta \mu x^2}$$

6.2 Β' ΟΜΑΔΑ

232. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \lambda - 2 & x \leq 1 \\ \frac{x^\lambda - 1}{x - 1} & x > 1 \end{cases}$$

όπου

$$\lambda > 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
 2. Υπάρχουν άραγε τιμές του λ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη;
- 233.** Έστω φ ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1.
1. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\varphi(x)} = 0$$

2. Ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς;

$$(\alpha') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{e^x} - \frac{\ln x}{\varphi(x)} \right) = 0$$

$$(\beta') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^2(x) - e^x \ln x}{e^x \ln x} = -1$$

$$(\gamma') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi^2(x) - e^x \ln x) = 0$$

234. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = e^\alpha$$

235. Για ποιά τιμή του λ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & , \quad x = 0 \\ x^x & , \quad x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

είναι συνεχής;



236. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη I. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B = \frac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν ϕ είναι μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$$

να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \phi(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Λύνοντας την δοθείσα σχέση ως προς $\phi(x)$ θα βρείτε ότι $\phi(x) = \frac{f(x) - Ag(x) - Bg(x)(x-\alpha)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}$. Κατόπιν βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} \phi(x)$ με την βοήθεια του κανόνα του De l' Hospital. Η τιμή που πρέπει να βρείτε για το όριο είναι $\frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)g^2(\alpha) - f(\alpha)g''(\alpha)g(\alpha) - 2g'(\alpha)f'(\alpha)g(\alpha) + 2f(\alpha)(g')^2(\alpha)}{g^2(\alpha)}$ ή αλλιώς $\frac{1}{2}(f''(\alpha) - Ag''(\alpha) - 2Bg'(\alpha))$.

237. Από τις εξετάσεις Mathematical Tripos, Cambridge, 1925. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο a τότε

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

238. Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = 0$ και ότι δεν μηδενίζεται κοντά στο 0. Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \sigma} \frac{e^{f(x)} + \eta \mu f(x) - 1}{f(x)}$

239. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 1$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha^x} = 0$.

6.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

240. Αν οι α, β, γ είναι θετικοί βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha^{x^3} + \beta^{x^3} + \gamma^{x^3}}{\alpha^{x^2} + \beta^{x^2} + \gamma^{x^2}} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

241. Με $0 < \alpha < \beta < \gamma$ βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha^x + \beta^x + \gamma^x)^{\frac{1}{x}}$.

7 Ασύμπτωτοι

7.1 Α' ΟΜΑΔΑ

242. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασυμπτώτους των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

2. $\varphi(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

3. $\sigma(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

4. $g(x) = \frac{x}{x^3-x-x^2+1}$

5. $h(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$

6. $\theta(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

243. Να βρείτε τις ασυμπτώτους για $x \rightarrow +\infty$ της συνάρτησης f στις περιπτώσεις:



1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

4. $f(x) = \frac{|4-x^2|}{|x+1|+|1-x|}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x+1}}$

3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} + \sqrt{x^2-1}$

6. $f(x) = \frac{(x+1)2^x}{2^x+1}$

7.2 Β' ΟΜΑΔΑ

244. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της $\mathcal{C}_f$ όταν

$$f(x) = \frac{|x^2-1|-5x}{x+1}$$

245. Έστω

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $A(0, -6)$ έχει άλλο ένα κοινό σημείο με την $\mathcal{C}_f$ του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

246. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της συνάρτησης $f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x-2}$.

247. Έστω

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1. Να βρεθούν οι ασύμπτωτοι της $\mathcal{C}_f$.

2. Υπάρχουν άραγε κοινά σημεία της $\mathcal{C}_f$ και των ασυμπτωτών της;

248. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη IV. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

1. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.

2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

249. Για τις συναρτήσεις f, g είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Να αποδείξετε ότι αν $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτος της f για $x \rightarrow +\infty$ τότε θα είναι και ασύμπτωτος της g για $x \rightarrow +\infty$.

250. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους;

251. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι υπάρχει θ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$|f(x)| \leq \theta$$

Έχει άραγε η f κατακόρυφες ασυμπτώτους;



7.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

252. Θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ και τους οποιουδήποτε αριθμούς $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Να βρεθούν οι αριθμοί A, B έτσι ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \sqrt{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2} + \dots + \sqrt{\alpha_n x^2 + \beta_n x + \gamma_n} - Ax - B \right) = 0$$

253. Για κάθε συνάρτηση φ που έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ με $\hat{\varphi}$ συμβολίζουμε την συνάρτηση $\hat{\varphi}(x) = \kappa x + \lambda$. Να αποδείξετε ότι αν

- Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο με θετικό συντελεστή διευσυνέσεως
- Η συνάρτηση g έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο

τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο ισχύει

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$$

254. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική προσέγγιση συναρτήσεων για $x \rightarrow \pm\infty$ όχι από ευθείες $y = \alpha x + \beta$ αλλά από συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha e^x + \beta$. Γράψτε μία «θεωρία» για αυτό το είδος ασυμπτώτων. Βρείτε και μερικά παραδείγματα.

8 Μελέτη και γραφική παράσταση.

8.1 Α' ΟΜΑΔΑ

255. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

256. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

257. Από τις εξετάσεις του 1983, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - |x| - 2$. Να γίνει η μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

258. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{20} (2x^3 - 24x^2 + 72x - 6)$$

259. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$.

8.2 Β' ΟΜΑΔΑ

260. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη I. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε

$$(x-2)f''(x) + (\alpha\eta\mu x - \beta x^2)f'(x) = e^{x-2} - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

261. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x_0) = f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(\nu)}(x_0) = 0$ και $f^{(\nu+1)}(x_0) \neq 0$ και η $f^{(\nu+1)}$ είναι συνεχής. Να επαληθεύσετε τα συμπεράσματα του ακόλουθου πίνακα:

$f^{(\nu+1)}(x_0) / \nu$	αν ο ν είναι άρτιος	αν ο ν είναι περιττός
αν $f^{(\nu+1)}(x_0) > 0$	τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0	τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0
αν $f^{(\nu+1)}(x_0) < 0$	τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0	τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0



8.3 Γ' ΟΜΑΔΑ

262. Για μία συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$1. f'(x) = e^{-x^2} (x-1)^2 (2-x) \text{ για όλα τα } x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Να μελετήσετε την f όσο καλλίτερα μπορείτε. Μην επιχειρήσετε να την βρείτε!!

9 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

263. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f . Είναι ολικά;
3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x}$$

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
5. Για ποιές τιμές του λ ισχύει

$$f(x) \geq \lambda + 1$$

για όλα τα x ;

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f που έχει τον ίδιο συντελεστή διευσυνέως με της (ε) .

264. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.
2. Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

265. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
2. Πόσες ρίζες έχει η f ;
3. Υπάρχουν άραγε πραγματικοί αριθμοί t τέτοιοι ώστε $f(t) = t$;
4. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης

$$g(x) = \eta \mu f(\eta \mu x)$$



266. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^{\ln x}$$

1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x \rightarrow +\infty$

267. Από τις εξετάσεις του 1989, Δέσμη Ι. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f'' = g''$

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να δείχθεί ότι:

1. Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$.
2. Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1 < \rho_2$ τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

268. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ και κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει³

$$e^x > \sum_{k=0}^{\nu} \frac{x^k}{k!}$$

269. 1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} \right)$$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f :

- (α') Είναι συνεχής
- (β') Είναι παραγωγίσιμη
- (γ') Έχει ακριβώς μία ρίζα.

270. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - \alpha x^2 - \beta x + \frac{1}{3}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε οι δύο συναρτήσεις να έχουν θέση τοπικού ακροτάτου στο $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_0) = g(x_0) = -2$$

³ Αν k είναι θετικός ακέραιος το $k!$ είναι $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$. Επίσης ορίζεται $0! = 1$



2. Για την τιμή των α, β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

(α') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $h(x) = f(x)g(x)$

(β') Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{g(e^x)}$$

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x) = f(g(x))$ έχει ελάχιστο.

271. Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι κυρτή και για κάποιο ζεύγος αριθμών $\alpha < \beta$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

272. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$1. \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa} + \frac{3}{x-\lambda} \text{ για κάθε } x \neq \kappa \text{ και } x \neq \lambda.$$

2. Η συνάρτηση $g(x) = \ln |f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

273. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x + \eta \mu x$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε άπειρα σημεία που απέχουν από την αρχή των αξόνων αποστάσεις $\nu\pi\sqrt{2}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$ και είναι σημεία καμπής της f .

3. Είναι η $y = x$ ασύμπτωτος της C_f ;

4. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση ενός σημείου της C_f από την $y = x$;

274. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - \ln x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

275. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει

$$f^2(x) + \ln^2 x + e^{2x} = 2e^x f(x) - g^2(x) + 2g(x) \ln x$$

για κάθε $x > 0$.

1. Να βρείτε τις f, g

2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

276. Να αποδείξετε ότι αν η $\varphi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ παρουσιάζει ακρότατα σε σημεία που βρίσκονται σε ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε θα ισχύει $\beta\gamma = 9\alpha\delta$.



277. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

278. Από τις εξετάσεις του 2004. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

279. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x}}$ έχει ασύμπτωτο την πρώτη διχοτόμο των αξόνων.

280. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \epsilon\varphi x + \sigma\varphi x$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

1. Να δείξετε ότι οι f, g παρουσιάζουν μέγιστο και ελάχιστο αντιστοίχως όταν $x = \frac{\pi}{4}$.
2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x > \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

281. Για ποιά τιμή του α η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 1$ εφάπτεται στην $y = 5$.

282. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x) = x\sqrt{3-2x}$.

283. Έστω η οικογένεια των συναρτήσεων

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x + x \ln x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f είναι συνεχείς.
2. Να δείξετε ότι για κάθε λ η f έχει μία μόνο οριζόντια εφαπτομένη και ότι το σημείο επαφής ανήκει στην ευθεία $y = -x$.

284. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμες. Επίσης ισχύουν:

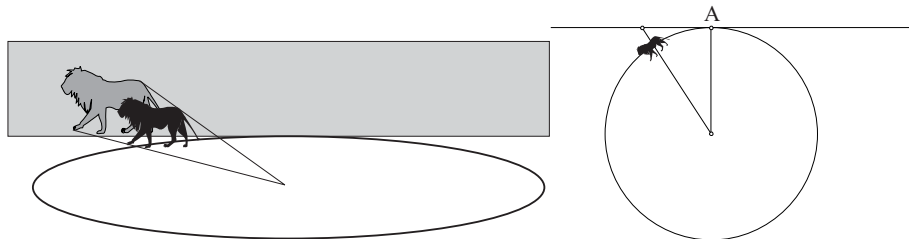
- $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$
- $f''(x)g(x) = f(x)g''(x)$

1. Να αποδειχθεί ότι $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$
2. Να αποδειχθεί ότι αν κανένας αριθμός του $[\alpha, \beta]$ δεν είναι ρίζα της g τότε κάθε αριθμός του $[\alpha, \beta]$ είναι ρίζα της f ,

285. Οι αριθμοί α, β, x είναι θετικοί, οι α, β σταθεροί και ο x μεταβλητός. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\alpha x + \frac{\beta}{x}$;



286. Ένα λιοντάρι κινείται στην κυκλική πίστα ενός τσίρκου με ταχύτητα 20 km/h με σημείο το εκκίνησης A . Στο κέντρο της πίστας βρίσκεται ένας προβολέας που φωτίζει το λιοντάρι. Ένα πέτασμα εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A και σε αυτό φαίνεται η σκιά του λιονταριού. Με τι ταχύτητα κινείται η σκιά τη χρονική στιγμή που το λιοντάρι έχει διανύσει το $\frac{1}{8}$ του κύκλου;



287. Από τις εξετάσεις του 2006. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού τους.
3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

288. Για τη συνάρτηση $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ είναι γνωστό ότι ισχύει

$$-x^2 \leq h(x) \leq x^2 + 1$$

για όλα τα x και ότι το “=” στην πρώτη ανισότητα ισχύει για $x = -1$ και στη δεύτερη ισχύει για $x = 1$. Να βρεθεί η $h(x)$.

289. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2005. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία⁴ συνάρτηση τέτοια ώστε

$$(f'(x))^2 = f(x)f''(x)$$

για όλα τα x . Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$ και $f^{(4)}(0) = 9$. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $f'(0)$.

290. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάποια x_1, x_2, x_3 με $0 < x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει $f(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, 3$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν t_1, t_2 με $0 < x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < x_3$ έτσι ώστε $f'(t_i) = \frac{f(t_i)}{t_i}$, $i = 1, 2$.

⁴ Δηλαδή έχει παραγώγους όλων των τάξεων.



2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

291. 1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένα y έτσι ώστε $y^3 + y = e^x + x$

2. Η συνάρτηση f ορίζεται από τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = e^x + x \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') Για κάθε x_0 ισχύει

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} ((e^x + x) - (e^{x_0} + x_0))$$

(β') Για κάθε x_0 ισχύει $|f(x) - f(x_0)| \leq |e^x + x - e^{x_0} - x_0|$

(γ') Η f είναι συνεχής.

(δ') Η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{e^x + 1}{3f^2(x) + 1}$.

(ε') Η f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

292. Έστω $f(x) = \ln x$ και $0 < \alpha < \beta$.

1. Να βρείτε το (μοναδικό) $\gamma \in [\alpha, \beta]$ που επαληθεύει το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $\alpha < \beta$.

2. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

293. 1. Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τέτοια ώστε $\alpha < \beta < \gamma$. Έστω ότι

$$(f(\beta) - f(\alpha))(f(\gamma) - f(\beta)) < 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$

2. Να αποδείξετε το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς όμως την υπόθεση συνεχείας της f' .

294. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & |x| > 1 \end{cases}$$

1. Να βρείτε σε ποια x_0 η f είναι συνεχής.

2. Να βρείτε σε ποια x_0 η f είναι παραγωγίσιμη.

3. Να κάνετε, πρόχειρα, την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

4. Υπάρχει άραγε συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F' = f$;

295. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $f(0) = 0$, είναι παραγωγίσιμη στο 0, $f'(0) = \frac{1}{2}$ και ότι για όλα τα x, y ισχύει:

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$$



1. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για όλα τα x .
2. Να αποδείξετε ότι η $f(x) \neq 1$ και $f(x) \neq -1$ για όλα τα x .
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για όλα τα x ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1 - f^2(x))$$

4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη,
5. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει:

$$\frac{(f(x) + 1)'}{f(x) + 1} - \frac{(f(x) - 1)'}{f(x) - 1} = 1$$

6. Να βρείτε την f .

296. Από τις εξετάσεις του 2001. Για μία πραγματική συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$.

297. Από τις εξετάσεις του 2002. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

1. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

298. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g(x) f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.⁵

⁵ Όταν τελειώσετε τη λύση απαντήστε στα ερωτήματα: Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες; Πότε οι ευθείες $y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha' x + \beta'$ είναι παράλληλες; Δοκιμάστε $f(x) = e^{-x^2} + \frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{2e}}$, $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $g(x) = \frac{2f(x)}{f'(x)}$. Τί έχετε να πείτε για το τελευταίο ερώτημα του θέματος της άσκησης ;;;



299. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

1. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

$$f\left(\frac{1}{2} + x\right) = f\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f .

300. Από το διαγωνισμό Putnam, 1973. Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση $f(x) = 2^x - 1 - x^2$;

301. Έστω η συνάρτηση (συνάρτηση του Cauchy):

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι f' , f'' .
2. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f .

302. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο α τότε ισχύει $f'(\alpha) \geq 0$.

303. Από τις εξετάσεις του 2008. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$$

304. Από τις εξετάσεις του 2009. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq -1$.

1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
2. Για $\alpha = e$

(α') να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.



(β') να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

(γ') αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

305. Από τις εξετάσεις ΑΣΕΠ του 2009. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha$, $0 < x < 1$ και $\alpha > 1$.

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0, 1)$.
2. Αποδείξτε ότι για όλα τα $x, y \in (0, 1)$ και $\alpha > 1$ ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
3. Αποδείξτε ότι, αν $x > 0, y > 0, \alpha > 1$ και $x + y = 1$, τότε ισχύει:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha + \left(y + \frac{1}{y}\right)^\alpha \geq \frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}$$



10 Απαντήσεις

1. $f'(1) = \frac{1}{4}$
2. $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $f'(e^2) = 3$
4. $f'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
5. $f'(1) = 1$
6. $f'(0) = 1$
2. 1. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}\sqrt{x^2-1}}$
2. $f'(x) = \frac{(e^x \ln x + 1)(1-x)}{(1+x \ln x)^2}$
3. $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$
4. $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(-1+x)}$
3. 1. $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$
2. $f'(x) = \frac{-\beta x}{\alpha \sqrt{\alpha - x^2}}$
3. $f'(x) = \frac{\beta x}{\alpha \sqrt{x^2 - \alpha^2}}$
4. $f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
4. 1. $f'(x) = \frac{(e^x \ln x + 1)(x-1)}{(1+x \ln x)^2}$
2. $g'(x) = 1 + 2\frac{|x^2-x|}{x^2-x}x - \frac{|x^2-x|}{x^2-x}, x \neq 0, 1$
9. 2
11. 1. $y = (1+e)x$
2. $y = 3x - 2$
3. $y = -2x + 7$
4. $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$
12. Όχι
13. $M(2, \frac{8}{3}), N(3, \frac{7}{2})$.
14. 1. $y = (2\sqrt{2} - 2)x - 3 + 2\sqrt{2}$,
 $y = (-2\sqrt{2} - 2)x - 3 - 2\sqrt{2}$
2. $y = (-3 + 2\sqrt{2})x + 4 - 2\sqrt{2}$,
 $y = (-3 - 2\sqrt{2})x + 4 + 2\sqrt{2}$
3. $y = -3x + 4$
4. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
17. $\kappa = 3, \lambda = -2$
18. $\alpha = 2$
21. $y = x - 1$
- 22.
23. $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{4}{3}$
26. 2
27. $f(1) = 2$
28. $y = x - 2$
29. $y = 6x - 2$
31. $p = \frac{e^2 + 6e + 1}{2e^2 + 4e + 6}$
32. Στο 1 δεν υπάρχει. Στο -1 υπάρχει και είναι $f'(-1) = -5$.
33. $f'(0) = 2$
34. 19
35. $g'(x) = \frac{\pi}{180} \sigma \nu \nu \frac{\pi x}{180}$
36. $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}$
37. $d'(x) = \frac{13x-2}{3\sqrt{13x^2-4x+1}}$
39. $\alpha = \pm 1$
43. Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύση την $x = \sqrt{e}$. Στο σημείο $P(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την $y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$.
44. $f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\nu\nu\frac{1}{x} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
45. 1. Η $f(x) = |x|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από το $x_0 = 0$.
2. Η $g(x) = |x| + |x-1|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από τα $x_0 = 0, 1$.
3. Η $h(x) = |\eta\mu x|$ παραγωγίζεται παντού εκτός από τα $x_0 = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.
47. Υπάρχουν άπειρες παραβολές που είναι της μορφής $f(x) = \alpha(x^2 - 2x + 1) + 3x + 2$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$
49. $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - |x|$.



50 Υπάρχει μία εφαπτομένη η $y = 4x - 3$ που εφάπτεται στην C_f στο σημείο με τετμημένη -2 και στην C_g στο σημείο με τετμημένη 1

53 (2) $\kappa = -4\nu + 2$, $\lambda = 4\nu - 8$

54 Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{8}, \sqrt{2} - 1\right), B\left(\frac{5\pi}{8}, -\sqrt{2} - 1\right),$
 $\Gamma\left(\frac{9\pi}{8}, \sqrt{2} - 1\right), \Delta\left(\frac{13\pi}{8}, -\sqrt{2} - 1\right)$

55 $f'(0) = 10$

57 $y = 6x - 2$

58 $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = -1$

59 (1) $f(-1) = g(-1) = 0$

63 325

64 $\alpha = 1$ ή $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ ή $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

66 $\mathcal{O}_X$.

67 1

71 (2) Δ εν είναι συνεχής στο 0

72 Λ, Λ, Σ

76 (1) $-\frac{1}{2}$, (2) $-\frac{3}{2x^2}$

77 α

82 $f''(2) = 42$

83 $x_0 = 0, y_0 \leq 0$

84 $y = -3x - 4$

85 $(f'(\eta\mu^2x) - f'(\sigma\nu^2x))\eta\mu 2x.$

86 $\frac{\nu x^{\nu+1} - \nu x^{\nu} - x^{\nu} + 1}{(x-1)^2}$

88 $y = kex$

89 $\kappa = 3, \lambda = -1, \mu = 2$

93 1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x - 1}$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{e}{x^2}$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)(1-x^2)}}$

94 1. $d'(t) = 5, E'(t) = 12t$

2. $d'(t) = \frac{x'(t)x(t)+y'(t)y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}, E'(t) = \frac{1}{2}(x'(t)y(t)+x(t)y'(t))$

95 1. $x'(t)x(t)+y'(t)y(t)=0$

2. $x'(t)+y'(t)=0$

3. $x'(t)e^{x(t)}+y'(t)e^{y(t)}=0$

96 Αν v_1, v_2 είναι οι ταχύτητες ρυμουλκού-
 ρυμουλκουμένου αντιστοίχως τότε $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}$

98 (1) $E(t) = 2t\sqrt{25-t^2}$, (2) $E'(4) = -\frac{14}{3}$

99 $g'(x) = -\mu(g(x) - M_0 - M)$. Η σταθερά M_0 είναι η συγκομιδή όταν δε χρησιμοποιηθεί λίπασμα.

100 Η f' μηδενίζεται στα -1, 0, 1. Η f παρουσιάζει ακρότατα στα 0,1 (τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο αντιστοίχως). Η g' μηδενίζεται στα -2, -1, 0, 1, 2. Η g παρουσιάζει ακρότατα στα -2, 1, 2 (τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο αντιστοίχως).

101 1. 1

2. -1, 1

3. -1, 1, 2

4. 1, 2

5. 0, $\ln 2$

6. $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

102 1. $\xi = 0$

2. $\xi = -2$

3. $\xi = 1$

4. $\xi = \ln 3 - \ln 2$

5. $\xi = \frac{1}{4}$

6. $\xi = \frac{1}{e}$

103 1. $\xi = \frac{5}{2}$

2. $\xi = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{283}$

3. $\xi = -2 + 3\sqrt{2}$

4. $\xi = 2$

5. κάθε $\xi \in (1, 4)$

6. $\xi = \frac{5}{2}$



104 $\xi = 1 - \frac{1}{6}\sqrt{21}$

105 (1) $f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$ (2) Τα ξ του θεωρήματος μέσης τιμής είναι τα $\xi = \sqrt{2}-1$, $\xi = 1-\sqrt{2}$.

107 1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$

2. Στα $x_0 \neq 0$

3. Όχι, διότι η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$

117 (2) Από το (1) βρίσκουμε ότι $\frac{\mu}{\xi-\alpha} + \frac{\nu}{\xi-\beta} = 0$ και λύνοντας ως προς ξ έχουμε ότι $\xi = \frac{\mu\beta+\nu\alpha}{\mu+\nu}$ από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα.

120 $g(x) = 1992e^x \sin x$

131 1. $[-\sqrt{2}, 0], [\sqrt{2}, +\infty)$

2. $(-\infty, 0], [\ln 4, +\infty)$

3. $(-\infty, 1), (1, +\infty)$

4. $(0, +\infty)$

132 Μέγιστο: $f(1) = \frac{17}{8}$, Ελάχιστο: $f(4) = 1$.

133 Μέγιστο: $f(1) = 3$, Ελάχιστο: $f(-1) = 1$.

134 Μέγιστο: $f(0) = 6$, Ελάχιστο: $f(2) = 0$.

135 (2) $[f(2), f(4)] = [11, 29]$

136 Η f είναι γνησίως αύξουσα $[-1, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$. Το σύνολο τιμών της f είναι $[f(-1), f(1)] \cup [f(2), f(1)] \cup [f(2), f(3)] = [-22, 6] \cup [5, 6] \cup [5, 10] = [-22, 10]$.

139 $[-\frac{1}{3}, 1]$

142 $f(3) = 12 \ln 9$

143 (1) $\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2}$ (2) Είναι γνησίως αυξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

144 $f(0) = \frac{2}{3}$

145 Για το ανοικτό ναι για το κλειστό όχι.

146 Υπάρχουν δύο σημεία τα $M(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

147 Όταν είναι ίσοι με 5.

149 (2) $d(p) = \sqrt{(p^2+4)(1+p^2)}$ (γ') Για $p = 0$ και είναι $d(0) = 2$.

150 Οι πωλήσεις μετά χρόνο t θα είναι $\Pi(t) = 500(\frac{3}{5})^{\frac{t}{20}}$ και $\Pi(30) = 60\sqrt{15} = 232, 38$.

151 Είναι $\Pi(t) = (\frac{5}{4})^{\frac{1}{10}t} \Pi_0$ και λύνοντας την εξίσωση $\Pi(t) = e\Pi_0$ βρίσκουμε $t = \frac{10}{\ln 5 - 2\ln 2} = 44,8$.

152 Η $E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{4\alpha\beta+2\sqrt{\alpha\beta S}}{2\beta}$ το οποίο είναι το

$$E\left(\frac{4\alpha\beta+2\sqrt{\alpha\beta S}}{2\beta}\right) = 4\alpha\beta + 4\sqrt{\alpha\beta S} + S$$

154 Είναι $f'(x) = n((1+x)^{n-1} - x^{n-1})$. Επομένως αν ο n είναι άρτιος η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν ο n είναι περιττός τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

157 (1) Όταν $x+y = \alpha$ η παράσταση xy παρουσιάζει μέγιστο για $x=y = \frac{\alpha}{2}$ ενώ η παράσταση x^2+y^2 παρουσιάζει ελάχιστο επίσης όταν $x=y = \frac{\alpha}{2}$. (2) Όταν $xy = \alpha$ η παράσταση $x+y$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=y = \sqrt{\alpha}$. (3) Όταν $x^2+y^2 = \alpha$ η παράσταση $x+y$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$. Η παράσταση $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ γράφεται $k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha-x^2}}$ και $k'(x) = \frac{x^3 - \sqrt{\alpha-x^2}^3}{x^2(\alpha-x^2)\sqrt{\alpha-x^2}}$ επομένως $k'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{\alpha-x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > \alpha \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$ δηλαδή έχουμε ελάχιστο για $x=y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$. (4) Για $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \alpha$ η $x+y$ παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=y = \frac{2}{\alpha}$.

159 Ο ολικός χρόνος που απαιτείται για την διαδρομή APB είναι $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{v_1} + \frac{\beta-x}{v_2}$ με $0 \leq x \leq \beta$. Επομένως

$$t'(x) = \frac{xv_2 - v_1\sqrt{x^2+\alpha^2}}{v_1v_2\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

Είναι

$$t'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha v_1 \sqrt{\frac{1}{v_2^2 - v_1^2}}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $\alpha v_1 \sqrt{\frac{1}{v_2^2 - v_1^2}} < \beta$ ή ισοδύναμα $v_2 > v_1 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$. Τότε ελάχιστο χρόνο έχουμε όταν $x = \alpha v_1 \sqrt{\frac{1}{v_2^2 - v_1^2}}$.



- Ισχύει $v_2 \leq v_1 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\beta}}$. Τότε η t είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και ελάχιστη τιμή του χρόνου έχουμε όταν $x = \beta$.

160 1. $D_g = (-1, +\infty)$

2. Γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

162 Το τυχόν σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης απέχει από την ευθεία απόσταση $d(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{\sqrt{10}}$ η οποία γίνεται ελάχιστη για $x = -2$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $P(-2, -8)$.

163 Είναι $\alpha = -\frac{6}{5}, \beta = -\frac{3}{20}$. Το πακό ελάχιστο στο $x = 1$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$.

166 $f(x) = x^2 + x$

168 (1) $\alpha = 5, \beta = 6$ (2) $f(t) \geq 12 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$.

169 $x = 0, x = 1$

171 Είναι $\widehat{POB} = 2x$. Επομένως $AP = 2\rho \sin x$ και ο ολικός χρόνος που απαιτείται για την διαδρομή APB είναι $t(x) = \frac{2\rho \sin x}{v_1} + \frac{2\rho x}{v_2}$. Εργαζόμαστε με την προϋπόθεση ότι $v_1 < v_2$. Είναι $t'(x) = \frac{2\rho}{v_1} \left(\frac{v_1}{v_2} - \eta \mu x \right)$ και $t'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} > \eta \mu x$. Αν x_0 είναι ο μοναδικός αριθμός του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$ για τον οποίο ισχύει $\eta \mu x_0 = \frac{v_1}{v_2}$ τότε η t είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της t παρουσιάζεται στα άκρα $0, \frac{\pi}{2}$ του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$. Είναι $t(0) = \frac{2\rho}{v_1}$ και $t(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi \rho}{v_2}$. Επομένως

- Αν είναι $v_2 < \frac{\pi}{2} v_1$ δηλαδή περίπου $v_2 < 1,57 v_1$ τότε η συντομότερη διαδρομή είναι η AB με άλλα λόγια ο αθλητής φθάνει γρηγορότερα στο B κολυμπώντας!
- Αν είναι $v_2 > \frac{\pi}{2} v_1$ ο αθλητής θα φθάσει γρηγορότερα στο B τρέχοντας κατά μήκος του τόξου AB .
- Στην περίπτωση που $v_2 = \frac{\pi}{2} v_1$ τότε ο ίδιος ελάχιστος χρόνος επιτυγχάνεται αν ο αθλητής κολυμπήσει κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ή αν τρέξει κατά μήκος του τόξου AB .

172 Τρεις.

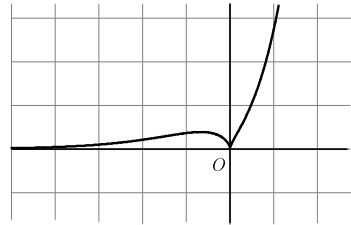
176 Είναι $f'(x) = e^{2\lambda - x} x^{\lambda - 1} (\lambda - x)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι στο $(0, \lambda]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[\lambda, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως έχει (ολικό) μέγιστο το $f(\lambda) = \lambda^\lambda e^\lambda = (\lambda e)^\lambda$. Έστω τώρα $g(\lambda) = (\lambda e)^\lambda$ με $\lambda > 0$. Είναι $g'(\lambda) = e^\lambda \lambda^\lambda (2 + \ln \lambda)$ και επομένως $g'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow 2 + \ln \lambda > 0 \Leftrightarrow \ln \lambda >$

$-2 \Leftrightarrow \lambda > e^{-2}$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = \frac{1}{e^2}$. Άρα η ελάχιστη μέγιστη τιμή της f επιτυγχάνεται όταν $\lambda = \frac{1}{e^2}$ και είναι η $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = e^{-e^{-2}}$.

177 Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζεται σε όλα τα x_0 εκτός του 0 και είναι

$$f'(x) = \frac{e^x |x|^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{3x + 2}{x}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{2}{3}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{2}{3}, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.



Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(x) \geq 0$ για όλα τα x , το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$. Η εξίσωση $e^x \sqrt[3]{x^2} - \lambda = 0$ ισοδυναμεί με την $f(x) = \lambda$ και το πλήθος των ριζών της εξαρτάται από το λ . Για $\lambda < 0$ η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα. Αν $\lambda = 0$ έχει ακριβώς μία και για $0 < \lambda = f(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{12}{e^2}}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες. Για $\lambda = f(-\frac{2}{3})$ έχει ακριβώς δύο και για $\lambda > f(-\frac{2}{3})$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

178 Αν $n(\lambda)$ είναι το πλήθος των ριζών της εξίσωσης τότε

$$n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \alpha \nu \quad |\lambda| > \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 2 & \alpha \nu \quad |\lambda| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 3 & \alpha \nu \quad 0 < |\lambda| < \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ 2 & \alpha \nu \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

180 1. Πεδίο ορισμού: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, Σύνολο τιμών: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

2. Γνησίως φθίνουσα, Γνησίως αύξουσα.

182 Είναι $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ και επομένως η μονοτονία της f στο διάστημα $[-2, 3]$ έχει ως εξής: Στο $[-2, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[1, 3]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Στο $[-2, 1]$ η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1$. Είναι $f(1) = -6 < 0$ και επομένως η f δεν μηδενίζεται στο $[-2, 3]$.



185 Έστω $f(x) = \sin x - x$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα. Όμως $f(0) = 1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Άρα από το θεώρημα του Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Άρα τελικά η f (άρα και η εξίσωση) έχει ακριβώς μία ρίζα.

186 Έχει ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

190 $f(4)$

191 $y = 0$

193 Με $z = x + yi$ είναι $|z^3 - z + 2|^2 = y^6 + (3x^2 + 2)y^4 + (3x^4 - 12x + 1)y^2 + x^6 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 4$ και αφού $x^2 + y^2 = 1$ είναι $|z^3 - z + 2|^2 = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$. Τελικά η μέγιστη τιμή είναι $\sqrt{13}$ που επιτυγχάνεται για $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

194 Ο όγκος του του κουτιού θα είναι

$$V(x) = x(\alpha - 2x)(\beta - 2x)$$

Επειδή πρέπει $2x < \alpha$ και $2x < \beta$ συμπεραίνουμε ότι θα είναι $x < \frac{\alpha}{2}$ και $x < \frac{\beta}{2}$.

Επομένως η συνάρτηση $V(x)$ θα έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, \frac{\beta}{2})$. Παραγωγίζοντας την $V(x)$ βρίσκουμε

$$V'(x) = 12x^2 - 4\alpha x - 4\beta x + \alpha\beta.$$

Λύνοντας την ανίσωση $V'(x) > 0$ βρίσκουμε ότι επαληθεύεται για

$$x < \frac{1}{6}(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}) \quad \text{ή} \quad x > \frac{1}{6}(\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}).$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$\frac{1}{6}(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}) < \frac{\beta}{2}$$

και ότι

$$\frac{1}{6}(\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}) > \frac{\beta}{2}.$$

Επομένως η $V(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left(0, \frac{1}{6}(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2})\right]$$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$$\left[\frac{1}{6}(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}), \frac{\beta}{2}\right).$$

Άρα παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x = \frac{1}{6}(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2})$.

196 1. Είναι τα $A(-2, 0), B(1, 0)$

2. • Για $\lambda = 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

- Για $\lambda \neq 0$ η παράγωγος της f έχει ρίζες τις $\rho_1 = \frac{-1 - \sqrt{9\lambda^2 - 3\lambda + 1}}{3\lambda}$ και $\rho_2 = \frac{-1 + \sqrt{9\lambda^2 - 3\lambda + 1}}{3\lambda}$. Αν είναι $\lambda > 0$ είναι $\rho_1 < \rho_2$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \rho_1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1, \rho_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\rho_2, +\infty)$. Στα ρ_1, ρ_2 παρουσιάζει αντιστοίχως τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούμεθα αν $\lambda < 0$.

199 Μέγιστο $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ για $x = \frac{3}{4}$

200 Το εμβαδόν είναι $E(r) = \frac{1}{4}r^2\sqrt{4 - r^2}$ και η μέγιστη τιμή του είναι $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ για $r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

202 $\frac{e-1}{e}$

- 208** 1. $(-\infty, 2]$: κοίλη, $[2, +\infty)$: κυρτή
2. $(-\infty, 1]$: κυρτή, $[1, 2]$: κοίλη, $[2, +\infty)$: κυρτή
3. $(0, 1]$: κοίλη, $[1, +\infty)$: κυρτή
4. $(-\infty, 0)$: κοίλη, $(0, +\infty)$: κυρτή
5. $[2k\pi, (2k+1)\pi]$: κοίλη, $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$: κυρτή ($k \in \mathbb{Z}$)
6. $(0, 1]$: κυρτή, $[1, +\infty)$: κοίλη

209 1. $A(1, 16)$

2. $A(e, 1 - 3e^2)$
3. $A(-1, -2), B(1, -2)$
4. $A(0, 169), B(1, 96e - 6), \Gamma(2, 48e^2 - 15)$
5. Το $A(0, 3)$ αλλά όχι το $B(1, 6)$
6. $A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right), B\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$

210 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

211 $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{9}{2}$

212 1. $f(x) = \frac{\alpha^3}{x^2 + \alpha^2}$

2. $A\left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3}, \frac{3\alpha}{4}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{3}, \frac{3\alpha}{4}\right)$

214 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

215 Είναι

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

και σημεία καμπής είναι τα $A(1, f(1)), B(-2 + \sqrt{3}, f(-2 + \sqrt{3})), \Gamma(-2 - \sqrt{3}, f(-2 - \sqrt{3}))$. Για να αποδείξουμε ότι είναι συνευθειακά μπορούμε να πάρουμε συντελεστές διευθύνσεως. Είναι: $\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{4}$ και επομένως τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.



219 Θα πρέπει $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ δηλαδή πρέπει $\alpha =$ **241** γ
 1. Για $\alpha = 1$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 7$$

$$f'(x) = x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$$

$$f''(x) = 2x - 3$$

Η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = \frac{3}{2}$ και επομένως πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \frac{3}{2}$.

222 (1) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

(2) $\lambda = -1$, $\lambda = 2$

227 1. 1 5. α

2. 2 6. $\frac{1}{\alpha}$

3. 0 7. 0

4. $-\frac{1}{\beta}$ 8. $\frac{\alpha}{\beta}$

228 1. $+\infty$ 5. 1

2. $+\infty$ 6. 2

3. 1 7. 0

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$

229 1. $\frac{1}{2}$ 5. 1

2. 0 6. 0

3. 1 7. 1

4. 1 8. e

230 $\frac{\pi}{2}$

231 $\frac{1}{2}$

232 (2) $\lambda = 3$

233 (2) Οι a, b .

234 Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}$. Εί-
 ναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\alpha}{x(x+\alpha)}}{-\frac{1}{x^2}} = \alpha$ και επομένως
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \alpha} e^y = e^\alpha$

235 Για $\lambda = 1$.

238 2

240 $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$

242 1. $x = 1$ 4. $x = 1, x = -1$

2. $x = 1, x = 2$ 5. $x = 1, x = -1$

3. $x = 1$ 6. *

243 1. $y = x - 1$ 4. $y = \frac{1}{2}x$

2. $y = x$ 5. $y = x + \frac{1}{2}$

3. $y = 2x - 1$ 6. $y = x + 1$

244 $x = -1, y = x - 6, y = x - 6$

245 (1) Είναι οι $x = 1, x = 2, x = 3$. (2) Η εφαπτομένη στο A είναι η $y = 11x - 6$. Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} y = 11x - 6 \\ y = f(x) \end{cases}$$

βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη επανατέμνει την C στο σημείο $B(6, 60)$.

246 Είναι $\mathcal{D}_f = (-1, 1) \cup (2, +\infty)$. Η f έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους τις $x = -1, x = 1, x = 2$ ενώ για $x \rightarrow +\infty$ δεν έχει ασύμπτωτο.

247 (1) $x = 0$ και $y = 1$ (2) Όχι.

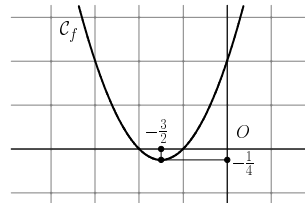
248 (1) 2 και 5 (2) $\mu = 2$

250 Όχι.

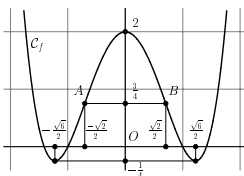
251 Όχι διότι δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

252 $A = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \dots + \sqrt{\alpha_n}, B = \frac{\beta_1}{2\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\beta_2}{2\sqrt{\alpha_2}} + \dots + \frac{\beta_n}{2\sqrt{\alpha_n}}$.

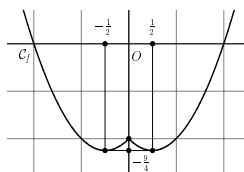
255 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δεν έχει ασυμπτώτους. Στο $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\frac{3}{2}$ το $-\frac{1}{4}$ το οποίο είναι και ολικό. Η γραφική της παράσταση είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι η :



256 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δεν έχει ασυμπτώτους. Στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0]$ είναι γνησίως αύξουσα, στο $[0, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ είναι γνησίως φθίνουσα, και στο $[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ το $-\frac{1}{4}$, τοπικό μέγιστο στο 0 το 2 και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{\sqrt{6}}{2}$ το $-\frac{1}{4}$. Τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά. Είναι κυρτή στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, κοίλη στο $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ και κυρτή στο $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Τα $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ είναι σημεία καμπής. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{1}{4}, +\infty)$. Η γραφική της παράσταση είναι η:



257 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γράφεται και $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 0 \\ x^2 - x - 2 & x \geq 0 \end{cases}$. Παραγωγίζεται παντού εκτός του 0 και η παράγωγος της είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$. Είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[-\frac{1}{2}, 0]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Στα $\pm \frac{1}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο που είναι και ολικό το $-\frac{9}{4}$. Στο 0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το -2. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{9}{4}, +\infty)$. Δεν έχει ασυμπτώτους. Η γραφική της παράσταση είναι η:



258 Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δεν έχει ασυμπτώτους. Είναι

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{18}{5} = \frac{3}{10}(x-2)(x-6)$$

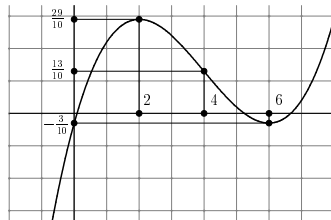
και

$$f''(x) = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}(x-4)$$

Ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	2	4	6	$+\infty$	
$f''(x)$	-	-	0	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{20}{3}$ τ.ε.	$\frac{12}{5}$ σ.κ.	$-\frac{12}{5}$ τ.μ.	$+\infty$	

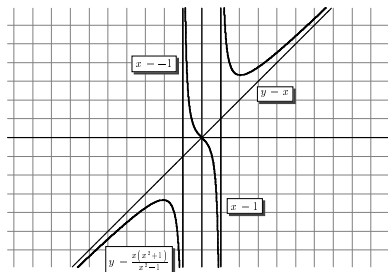
και η γραφική της παράσταση η



259 Είναι $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Η $\mathcal{C}_f$ έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους τις $x = -1, x = 1$ (αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$) και ασύμπτωτο για $x \rightarrow \pm\infty$ την $y = x$ (αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 0$). Είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ και $f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$, $f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$. Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, ή $x > \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Επίσης $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ ή $x > 1$. Παρατηρείστε ότι η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Ο πίνακας μεταβολής της f είναι

x	$-\infty$	$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$	-1	0	1	$\sqrt{2+\sqrt{5}}$	$+\infty$			
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$+$		
$f(x)$		$\tau, \mu,$		$+\infty$	$\sigma, \kappa,$		$+\infty$	$\tau, \varepsilon,$		$+\infty$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ το $f(-\sqrt{2 + \sqrt{5}}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\sqrt{(2 + \sqrt{5})}$, τοπικό ελάχιστο στο $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ το $f(\sqrt{2 + \sqrt{5}}) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\sqrt{(2 + \sqrt{5})}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων και είναι η:



260 Από τη σχέση $f''(x) = \frac{e^{x-2}-1}{x-2} - \frac{\alpha\eta\mu x - \beta x^2}{x-2} f'(x)$ συναγομμε ότι η f'' είναι συνεχής και παίρνοντας όρια για $x \rightarrow \rho$ βρίσκουμε ότι $f''(\rho) > 0$. Αυτό προσέχοντας ότι $\frac{e^{x-2}-1}{x-2} > 0$. Επομένως κοντά στο ρ είναι $f(x) > 0$ κτλ

263 1. Γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2}\sqrt{6}, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}\sqrt{6}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}\sqrt{6}, +\infty)$.

2. Στα $-\frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{6}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-\frac{1}{2}\sqrt{6}) = f(\frac{1}{2}\sqrt{6}) = -\frac{1}{4}$ που είναι και ολικό ελάχιστο. Στο 0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το 2.

3. 0

4. Είναι $\mathcal{D}_h = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Η h παραγωγίζεται στο $\mathcal{D}'_h = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ και ισχύει $h'(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$

5. $\lambda \leq -\frac{5}{4}$

264 για το (1'): Είναι $A(-1, \alpha-1)$, $B(0, \alpha)$, $\Gamma(1, \alpha-1)$ και $\lambda_{AB} = 1$, $\lambda_{B\Gamma} = -1$ οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$.

265 1. Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[\frac{2}{3}, +\infty)$. Γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{2}{3}]$.

2. Μία.

3. Ναι οι -1 και 1.

4. $g'(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x + 1)(3\eta\mu x - 2)\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

266 1. Τοπικό ελάχιστο το 1 για $x = 1$ που είναι και ολικό

2. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχόν σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$y = 2 \frac{e^{\ln^2 x_0}}{x_0} \ln x_0 (x - x_0) + x_0^{\ln x_0}$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να επαληθεύεται από το ζεύγος $x = 0, y = 0$.

3. $+\infty$

269 (1) 0

270 (1) $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = 1, (2) a : 3 b : +\infty$

273 (3) Όχι. Για να είναι η $y = x$ ασύμπτωτος στο $+\infty$ πρέπει η διαφορά $f(x) - x = \eta\mu x$ για $x \rightarrow +\infty$ να έχει όριο το 0 πράγμα που δεν αληθεύει διότι ως γνωστόν η $\eta\mu x$ δεν έχει όριο για $x \rightarrow +\infty$. Για τον ίδιο λόγο δε μπορεί η $y = x$ να είναι ασύμπτωτος για $x \rightarrow -\infty$.

(4) Το τυχόν σημείο της C_f είναι της μορφής $M(x, x + \eta\mu x)$ και η απόσταση του από την ευθεία $y = x$ είναι $\frac{|x - (x + \eta\mu x)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} |\eta\mu x| \sqrt{2}$ η

οπότε είναι μέγιστη όταν $|\eta\mu x| = 1$. Η μέγιστη Ευκλείδεια Σχολής Σύμπτυξης

http://lyk-evsch-n-smryn.att.sch.gr

274 (2) 0

275 (1) $f(x) = \ln x, f(x) = e^x, (2) 0$

278 (1) Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$.

Στο διάστημα $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\frac{1}{2e}$

(2) Στο διάστημα $(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}]$ η f είναι κοίλη και στο $[\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty)$ είναι κυρτή. Σημείο καμπής είναι το $M(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3e^{-3}}{2})$. (γ') Σύνολο τιμών είναι το $[-\frac{1}{2e}, +\infty)$.

281 $\alpha = -3$

282 1 για $x = 1$

285 $2\sqrt{\alpha\beta}$

286 40km/h

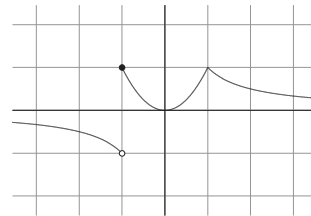
288 $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

289 $\pm\sqrt{3}$

292 (1) $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\ln \beta - \ln \alpha}$

294 1. Είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$.

2. Είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq \pm 1$.



3.

4. Όχι.

295 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

299 $f(0) = f(1) = \frac{3}{2}$

300 Έχει τρεις ρίζες το 0, το 1 και μία ακόμη μεταξύ 4 και 5.

301 1. $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 $f''(x) = \begin{cases} -2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{3x^2-2}{x^6}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. $A(-\frac{1}{3}\sqrt{6}, e^{-\frac{3}{2}}), B(\frac{1}{3}\sqrt{6}, e^{-\frac{3}{2}})$

303 (3) 0 ρίζες αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, 1 ρίζα αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, 2 ρίζες αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, 1 ρίζα αν $\alpha \geq 0$.

