Πειραματικο Λυκειο

της

Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

ΤΑΞΗ Γ΄

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ολοκληρώματα

Ασκήσεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σχολικό Έτος 2009-2010

Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ταξη Γ, Μαθηματικα Θετικης και Τεχνολογικης Κατευθυνσης,
Ολοκληρωματα, Ασκησεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

5 Ιουλίου 2009
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

1 Αόριστο Ολοκλήρωμα: Τα Βασικά

1.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

1. Βρείτε από μία παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. e^{x+1}
2. e^{2x}
3. $2e^{x}$
4. e^{2x+1}

2. Βρείτε από μία παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $2x^2 - x + 1$
2. $\frac{1}{x} + e^x$
3. $x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x}$
4. $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

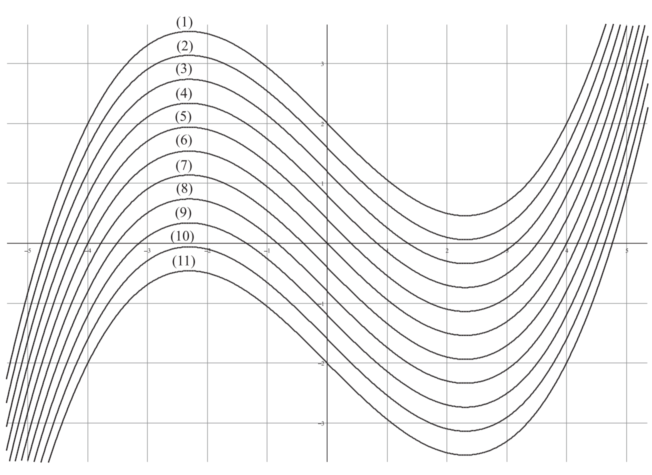
Συνάρτηση	Μία παράγουσα
f	F
g	G
$f+g$	
$fG+gF$	
$\frac{fG-Fg}{G^2}$	
$3fF^2+4gG^3$	

4. Βρείτε από μία παράγουσα F της $f(x) = x + 1$ τέτοια ώστε $F(0) = 1$.

5. Η συνάρτηση f έχει παράγουσα την $F(x) = \frac{x}{e^x} + (x+1)^2$. Να βρείτε μία παράγουσα G ης f τέτοια ώστε $G(\ln 2) = 1$

6. Μπορούν άραγε οι συναρτήσεις $F(x) = e^{x+1} + x$, $G(x) = e^{x+1} - x$ να είναι παράγουσες της ίδιας συνάρτησης·

7. Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζονται μερικές παράγουσες της ίδιας συνάρτησης f δηλαδή η γραφική παράσταση μερικών από τις συναρτήσεις που απαρτίζουν το $\int f(x)\,dx$.



Βρείτε ποιά παράγουσα

1. Έχει ρίζα το 4.
2. Διέρχεται από το σημείο Α$(0, -2)$.

8. Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει το πολύ μία παράγουσα της f που έχει ρίζα τον αριθμό 2009.

1.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

9. Είναι γνωστό ότι όταν ένα σώμα κινείται στον αέρα δέχεται αντίσταση από τον αέρα της οποίας ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος της ταχύτητας του. Για ένα συγκεκριμένο σώμα η αντίσταση είναι $4N$ όταν κινείται με ταχύτηα $3m/sec$. Ποια θα είναι η αντίσταση του σώματος όταν κινείται με ταχύτητα $6m/sec$;

10. Ένα μέγεθος $\Xi(t)$ μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t και ο ρυθμός μεταβολής του κάθε χρονική στιγμή είναι διπλάσιος της τιμής του μεγέθους. Βρείτε την τιμή του μεγέθους για $t = 3$ αν γνωρίζετε ότι η τιμή του για $t = 2$ είναι 1.

11. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

- Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι x_0^2.

12. Να αποδείξετε ότι:

$$\int \sqrt{x^2+k}\; dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right] + c$$

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

αν και ασυνεχής στο 0 έχει παράγουσα την $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ενώ η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

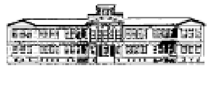
η οποία είναι επίσης ασυνεχής στο 0 δεν έχει παράγουσα.

14. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) = 2e^{2x-f(x)}$ για όλα τα x.

15. Έστω f συνεχής με πεδίο ορισμού το το Δ. Να αποδείξετε ότι αν ένα στοιχείο F του $\int f(x)\,dx$ δηλαδή για μία παράγουσα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε και κάθε άλλη έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

16. Έστω f συνεχής με πεδίο ορισμού το Δ. Να αποδείξετε ότι μία παράγουσα F της f είναι γνησίως αύξουσα τότε είναι και οι υπόλοιπες.

17. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της $\mathcal{C}_f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



2 Αόριστο Ολοκλήρωμα: Τεχνικές

18. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (x+1)\, dx$
2. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) dx$
3. $\int \frac{x+1}{x^2} dx$
4. $\int \frac{x^3+1}{x^6} dx$

19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sqrt{x+1} dx$
2. $\int \eta\mu\,(2x)\, dx$
3. $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$
4. $\int e^{x-1} dx$

20. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sqrt[13]{x^{18}} dx$
2. $\int \frac{1}{1+\frac{1}{x}} dx$
3. $\int (x+1)\,(x+2)\, dx$
4. $\int \frac{x+1}{x+2} dx$

21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \left(x^2 + y\right) dx$
2. $\int \left(x^2 + y\right) dy$
3. $\int \left(\frac{1}{x+1} + \eta\mu x\right) dx$
4. $\int \sqrt{3x+2} dx$

22. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x\sqrt{x} dx$
2. $\int \frac{x+\alpha}{x+\beta} dx$
3. $\int \frac{x+y}{x-y} dx$
4. $\int \frac{x+y}{x-y} dy$

23. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (x+1)\,(x+2)\,(x+3)\, dx$
2. $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} dx$
3. $\int (x^m + x^n)\, dx$
4. $\int \eta\mu\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) dx$

24. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x e^{x^2} dx$
2. $\int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}\right) dx$
3. $\int x\eta\mu x dx$
4. $\int \left(x^2 + y^2\right) dx$

25. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int e^{x+2}\,(x-1)\, dx$
2. $\int x e^{x+1} dx$
3. $\int x^2 e^{x+1} dx$
4. $\int |x|\, dx$

26. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$
2. $\int \left(e^{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) dx$
3. $\int \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t dt$
4. $\int \frac{e^x}{e+1} dx$

27. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x 3^x dx$
2. $\int \left(\frac{p}{p+q}\right)^t dt$
3. $\int \left(\frac{p}{p+q}\right)^t dq$
4. $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

28. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$
2. $\int \frac{6x^3+x-2}{x^2-3x+2} dx$
3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int \left(e^x + x^e\right) dx$

29. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2+1\right) dx$
2. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 13x} dx$
3. $\int \frac{5x^2+3x+1}{x-1} dx$
4. $\int \frac{5x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)} dx$

30. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x e^{3x-1} dx$
2. $\int \left(x^3 + e^3 + \eta\mu x\right) dx$
3. $\int \eta\mu\left(2x\right)\eta\mu\left(3x\right) dx$
4. $\int \sigma\upsilon\nu\left(3x+\pi\right) dx$

31. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \sigma\upsilon\nu\left(3x+\pi\right)\eta\mu\left(2x-\pi\right) dx$
2. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$
3. $\int \left(2^x + 3^x\right) dx$
4. $\int \left(1+4x\right)^{\frac{3}{5}} dx$

32. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int x^3 e^{x^4} dx$
2. $\int x^3 e^x dx$
3. $\int \left(\eta\mu x + 1\right)^2$
4. $\int \left(\left(x-2\right)^2 + \left(x-3\right)^2\right) dx$

33. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \left(\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx$
2. $\int \left(x-2\right)^2\left(x-3\right)^2 dx$
3. $\int e^{\alpha x+\beta x} dx$
4. $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx$

34. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{u^5}{13u^6+18}du$
2. $\int x \ln \sqrt{x}$
3. $\int (\alpha x+\beta)^{\gamma}\, dx$
4. $\int 2\left(\frac{4}{7}\right)^t dt$

35. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int f(x)\, dx$ όταν $f(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
2. $\int \frac{x}{1+|x|}dx$

36. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$
2. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$
3. $\int \sqrt{2x-3}dx$
4. $\int \sqrt{\frac{1}{x-1}}dx$

37. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{(\ln(x))^5}{x}dx$
2. $\int \left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}} x^2 dx$
3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
4. $\int xe^{4x^2+5}dx$

2.1 Β′ ΟΜΑΔΑ

38. Έστω x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του πολυωνύμου x^3-7x^2+6x. Αφού προσδιορίσετε αριθμούς α, β, γ έτσι ώστε για κάθε x διάφορο των x_1, x_2, x_3 να ισχύει

$$\frac{1}{x^3-7x^2+6x} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2} + \frac{\gamma}{x-x_3}$$

κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^3-7x^2+6x}dx$$

39. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$.

1. Να βρείτε αριθμούς A, B, Γ, Δ, E έτσι ώστε $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x-2} + \frac{\Delta}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}$.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\, dx$

40. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \varepsilon\varphi^2 x dx$

41. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}dx$.

42. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

43. Να βρεθεί συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$ τέτοια ώστε:

1. $f''(x)\sqrt{x-1} = 1$

2. Η γραφική παράσταση της f να έχει εφαπτομένη στο σημείο $(2, f(2))$ την ευθεία $3y - 3x + 5 = 0$

44. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

45. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}} dx$

46. Χρησιμοποιείστε τον καθολικό μετασχηματισμό του Euler, $t = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, για υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx$

47. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$

48. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = x + \frac{1}{x}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{x+\frac{1}{x}} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) dx$$

49. Έστω ότι

$$I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$$

$$J_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $$I_\nu = -\frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu^{\nu-1} x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$$

2. $$J_\nu = \frac{1}{\nu}\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x + \frac{\nu-1}{\nu} J_{\nu-2}$$

50. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2}{(\alpha x^3+\beta)^\nu} dx$ όπου ν είναι φυσικός μεγαλύτερος του 1.

51. Έστω $f(x) = \alpha 2^x + \beta$. Να υπολογισθούν τα α, β έτσι ώστε να ισχύει $f'(1) = 2$ και $\int_0^3 f(x)\, dx = 7$.

52. Βρείτε το $\int_0^1 \ln\left(1 + x^2\right) dx$.

53. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}} dx$.

54. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$
2. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} dx$
3. $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} dx$

55. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\sqrt{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} dx$
2. $\int \frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} dx$

3. $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}dx$

56. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

57. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\eta\mu^2\left(\sqrt{x}\right)}dx$.

2.2 Γ′ ΟΜΑΔΑ

58. Έστω $I_n = \int e^{ax}\sigma\upsilon\nu^n \beta x dx$. Να εκφράσετε το I_n συναρτήσει του I_{n-2}.

59. Έχει αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\ln x}dx$$

που ονομάζεται **λογαριθμικό ολοκλήρωμα** δεν υπολογίζεται δηλαδή μολονότι υπάρχει δε μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων.
Να στηριχθείτε στο παραπάνω για να αποδείξετε ότι και το ολοκλήρωμα

$$\int e^x \ln x dx$$

δεν υπολογίζεται.

60. Το πιο απλό μοντέλο για την περιγραφή της ανάπτυξης ενός πληθυσμού $P(t)$ προκύπτει αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του είναι ανάλογος του ήδη υπάρχοντος πληθυσμού δηλαδή ότι $P'(t) = kP(t)$ (**Εκθετικό μοντέλο**). Συχνά όμως οι πληθυσμοί δε μπορούν να υπερβούν ένα μέγιστο L που καθορίζεται από τις εκάστοτε συνθήκες. Σε μια τέτοια περίπτωση θεωρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος *όχι μόνο* του υπάρχοντος πληθυσμού *αλλά και* των υπαρχόντων περιθωρίων αύξησης δηλαδή του $L-P(t)$. Αντί δηλαδή της σχέσης $P'(t) = kP(t)$ του εκθετικού μοντέλου έχουμε την σχέση:

$$P'\left(t\right) = kP\left(t\right)\left(L-P\left(t\right)\right)$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$\int \frac{P'\left(t\right)}{P\left(t\right)\left(L-P\left(t\right)\right)}dt = \int kdt$$

2. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = P\left(t\right)$ να αποδείξετε ότι
$$\int \frac{P'\left(t\right)}{P\left(t\right)\left(L-P\left(t\right)\right)}dt = \int \frac{du}{u\left(L-u\right)}$$

3. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $\int \frac{du}{u(L-u)}$ να αποδείξετε ότι
$$P\left(t\right) = \frac{Le^{L(kt+c)}}{1+e^{L(kt+c)}}$$
όπου c σταθερά.

4. Να αποδείξετε ότι
$$P\left(t\right) = \frac{LP_0}{P_0+\left(L-P_0\right)e^{-Lkt}}$$
όπου $P_0 = P\left(0\right)$

3 Ορισμένο Ολοκλήρωμα: Έννοια, Ιδιότητες

3.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

61. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$, $\int_0^4 f(x)\,dx = 64$ και $\int_1^3 f(x)\,dx = 20$ να βρείτε το $\int_3^4 f(x)\,dx$.

62. Αν

$$\int_0^\alpha (2f(x) + 3g(x)) = 5$$

και

$$-4\int_0^\alpha f(x)\,dx + 5\int_0^\alpha g(x)\,dx = 7$$

να βρείτε τα

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx$$

και

$$\int_0^\alpha g(x)\,dx$$

63. Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_3^4 f(x)\,dx - \int_3^2 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^4 f(x)\,dx$$

64. Αν για την συνεχή f ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 4$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{\int_\alpha^\beta \beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta \alpha f(x)\,dx}{\beta - \alpha} - \int_\beta^\alpha 3f(x)\,dx$$

65. Έστω $f(x) = e^x$. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

1. $\int_0^t f(x)\,dx = 3$
2. $\int_0^{1+t} f(x)\,dx = 3$
3. $\int_0^1 f(t+x)\,dx = 3$
4. $\int_0^1 tf(x)\,dx = 3$

66. Για ποιούς αριθμούς $b > 1$ ισχύει

$$\int_1^b (b - 4x)\,dx \geq 6 - 5b$$

67. Από τις εξετάσεις του Πανπιστημίου του Τοροντο, 1994.

1. Να υπολογίσετε το $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (t+1)\,\sigma\upsilon\nu(2t)\,dt$.
2. Να Επαληθεύσετε την απάντηση σας παραγωγίζοντας.

68. Να αποδείξετε ότι

$$\int_2^3 \left(x^2 + \beta x + \gamma\right) dx = 2 - \int_0^1 \left(x^2 + \beta x + \gamma\right) dx + 2\int_1^2 \left(x^2 + \beta x + \gamma\right) dx$$

3.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

69. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^2 (t-\log_2 \alpha)\,dt = 2\log_2\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

70. Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

71. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha<\beta$ και για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = 0$$

τότε $f(x)=0$ για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$.

72. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{2}{\sqrt{e}} < \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx < 2$$

73. Να αποδείξετε ότι

$$\ln\sqrt[4]{4} < \int_3^4 \frac{\ln t}{t}dt < \ln\sqrt[3]{3}$$

74. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα Δ. Υποθέτουμε ότι για δύο υποδιαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\kappa,\lambda]$ του Δ ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ και $\int_\kappa^\lambda f(x)\,dx < \int_\kappa^\lambda g(x)\,dx$. Να αποδείξετε ότι οι $(C)_f$, $(C)_g$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

75. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για όλα τα x. Να λύσετε την εξίσωση $\int_x^{e^x-1} f(t)\,dt = 0$.

3.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

76. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1981. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Βρείτε το όριο

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 x^t f(x)\,dx$$

4 Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$

4.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

77. Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις:

1. $f(x)=\int_1^x e^t dt$
2. $g(x)=\int_x^1 \sqrt{t}dt$

3. $h(x) = \int_1^{x^2+x+1} \sqrt{t-2}dt$

4. $s(x) = \int_{x+1}^{4x-2} e^t dt$

5. $w(x) = \int_1^x \left(axe^{-t^2} + b\right) dt$

78. Έστω $\varphi(x) = \int_0^x \eta\mu t dt$. Βρείτε τα $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

79. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x (2t-5)\,dt$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $\mathcal{C}_f$ στα σημεία με τετμημένες 2 και 3.

80. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\int_{\alpha}^{\alpha x} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

81. Να βρείτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x) = x\eta\mu x$ και $f(0) = 0$.

82. Έστω $F(x) = \int_2^x e^t dt$, $G(x) = \int_3^{-x} \left(t^2+1\right) dt$. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $(F(x) + G(x))' = e^x - x^2 - 1$

2. $(F(x) \cdot G(x))' = e^x \int_3^{-x} \left(t^2+1\right)\, dt - x^2 \int_2^x e^t\, dt - \int_2^x e^t\, dt$

3. $(F \circ G)'(x) = -\left(x^2+1\right) e^{\int_3^{-x}\left(t^2+1\right)\,dt}$

83. Βρείτε το $\int_{-x}^x \frac{e^t+t^2}{e^t+1} dt$.
Υποδειξη: Παραγωγίστε.

84. Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \eta\mu\left(t^2\right)dt}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}$

85. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) = 4f(x)$.

4.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

86. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι γιά όλα τα $x > 0$ ισχύει

$$x \int_0^x f(t)dt > \int_0^x tf(t)dt$$

87. Η συνάρτηση $I : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $I(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+5t+6} dt$ είναι συνεχής (γιατι;) και επομένως παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο. Βρείτε τα.

88. Για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι δε μηδενίζεται και ότι για όλα τα $x\neq$ και ισχύει

$$\int_0^x f(t)(t+1)\,dt=f^2(x)$$

Να βρείτε την f.

89. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)'=\begin{vmatrix}\beta'(x) & f(\alpha(x))\\ \alpha'(x) & f(\beta(x))\end{vmatrix}$$

90. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση

$$f(x)=\int_2^{e^x}\frac{\ln t}{t}dt$$

91. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Αν $G(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ όπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $x>0$, $t>0$ να βρείτε:

1. $G''(1)$
2. το $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$

92. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση

$$g(x)=\int_{x^2}^1\ln t dt$$

93. Να βρεθεί η παράγωγος της f στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $f(x)=\int_1^x\frac{\eta\mu t}{t}dt$
2. $f(x)=\int_1^x\frac{\eta\mu tx}{tx}dt$

94. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη I. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0<\alpha<\beta$ τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=0$ και τη συνάρτηση

$$g(x)=2+\frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)\,dt,\quad x\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
2. $g(x_0)=2+f(x_0)$

95. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{x+1}^{x-1}\ln t dt$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή-κοίλη.

96. Έστω
$$f\left(x\right)=\int_1^x\frac{t-1}{e^t}dt$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
2. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της f

97. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Με την βοήθεια της
$$g\left(x\right)=\left(1-x\right)\int_0^x f\left(t\right)dt$$
να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f\left(t\right)dt=\left(1-x\right)f\left(x\right)$ έχι μία τουλάχιστον ρίζα.

98. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για όλα τα x ισχύει:
$$\int_0^x e^t f\left(x-t\right)dt=\eta\mu x$$

99. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F\left(x\right)=\int_1^x\left(t^4-t^3-t+2\right)dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

100. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(0,+\infty)$ ισχύει:
$$\int_\alpha^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{\alpha}}\frac{dx}{1+x^2}$$

101. Να παραγωγίσετε την συνάρτηση $\int_x^{x^3}a^3dt$.

102. Για ποια τιμή του x το ολοκλήρωμα $\int_x^{x+3}t\left(5-t\right)dt$ γίνεται μέγιστο; Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

103. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\int_0^x\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t-1\right)dt$ είναι γνησίως αύξουσα.
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Στηριχθείτε στην ανισότητα $e^x\geq x+1$

104. Να βρείτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία, για όλα τα x, ισχύει
$$\int_0^x f\left(t\right)dt=xe^x+d$$

105. Έστω $I\left(x\right)=\int_0^x\left(1+t\right)^\nu dt$. Να αποδείξετε ότι
$$\left(1+x\right)I''\left(x\right)-\nu I'\left(x\right)=0$$

106. Να βείτε σε ποια x_0 παρουσιάζει ακρότατο ή καμπή η συνάρτηση:
$$\varphi\left(x\right)=\int_0^x\left(t-1\right)\left(t-2\right)^3dt$$

107. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν είναι γνωστό ότι
$$\int_0^x f\left(t\right)dt=f\left(x\right)-e^x$$

108. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για όλα τα x,y. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=0$.

109. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ για την οποία ισχύει

$$2\int_\alpha^x f(t)\,dt=2\eta\mu x-1$$

όπου $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του α.

110. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $F(x)=\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt$. Να αποδείξετε ότι $F'(x)=f(x+\alpha)-f(x-\alpha)$.

111. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για όλα τα x ισχύει

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt=x\eta\mu(\pi x)$$

Να βρείτε τον τύπο της $g(x)=f\left(x^2\right)$.

112. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2006. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$xg(f(x))f'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(f(x))f'(x)$$

για όλα τα x. Επιπλέον, η f είναι μη αρνητικη και η g θετική. Ακόμη για κάθε α

$$\int_0^\alpha f(g(x))\,dx=1-\frac{e^{-2\alpha}}{2}$$

Δοθέντος ότι $g(f(0))=1$ να υπολογίσετε το $g(f(4))$.

113. Έστω $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ μία συνεχής συνάρτηση η οποία γίνεται μηδέν μόνο στο μηδέν. Έστω

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x tf(t)\,dt}$$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

114. Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερός. Για την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $\int_\alpha^{\alpha x} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt=\int_1^x f(t)\,dt$ για όλα τα x. Ποια μπορεί να είναι η συνάρτηση f;
Υποδειξη: Να μετασχηματίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{\alpha x} f(t)\,dt$.

115. Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για όλα τα x. Έστω ότι για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)=\int_0^x g(f(t))\,dt$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο της.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

116. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(x\right)=\int_{0}^{x}f\left(t\right)dt)+1$$

117. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2003. Για ποια τιμή του $\alpha>1$ το

$$\int_{a}^{a^{2}}\frac{1}{x}\ln\frac{x-1}{32}dx$$

γίνεται ελάχιστο;

118. Απο τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη Ι. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x}e^{-t}f\left(t\right)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f\left(x\right)$$

με $x,\alpha\in\mathbb{R}$.

Charles Hermite
1822-1901

119. Να βρείτε το α ώστε η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\int_{0}^{x^{2}}\eta\mu\sqrt{x}dx}{x^{3}}, & x\neq0\\ \alpha\quad, & x=0\end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Jacques Salomon Hadamard
1865-1963

120. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$h\left(x\right)=1999\left(x-1\right)+\int_{1}^{x}\frac{h\left(t\right)}{t}dt$$

για κάθε $x\geq1$. Να αποδείξετε ότι

1. $h(x)=1999x\ln x,\ x\geq1$.
2. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

121. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια τότε η συνάρτηση $F\left(x\right)=\int_{0}^{x}f\left(t\right)dt$ είναι περιττή.

4.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

122. Το θεώρημα Hermite- Hadamard. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f\left(t\right)dt<\frac{f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right)}{2}$$

5 Ορισμένο Ολοκλήρωμα: Τεχνικές

5.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

123. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^3 x dx$
2. $\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx$
3. $\int_{-1}^1 x^2 dx$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x dx$

124. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-1}^2 \sqrt{x+7} dx$
2. $\int_2^4 \left(e^x - e^{-x}\right) dx$
3. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{x} dx$
4. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx$

125. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_\alpha^\beta \sqrt{x} dx$
2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 2x dx$
3. $\int_\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \ln x dx$
4. $\int_p^{p^2} x^2 dx$

126. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-6}^{-1} \frac{1}{x} dx$
2. $\int_3^1 x^2 dx$
3. $\int_{-9}^{-12} \frac{x+1}{x+2} dx$
4. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx$

127. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_s^t \left(u^2+1\right) du$
2. $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$
3. $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

128. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \left(\int_0^x (3t+1) dt\right) dx$
2. $\int_0^1 \left(\int_0^1 (3t+1) dt\right) dx$
3. $\int_x^{x^2} (2t-1) dt$
4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

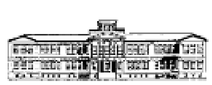
129. Να υπολογίσετε τα:

1. $\int_1^2 \left(\int_3^4 (x+2y) dx\right) dy$
2. $\int_3^4 \left(\int_1^2 (x+2y) dx\right) dy$
3. $\int_1^2 \left(\int_3^4 (x+2y) dy\right) dx$
4. $\int_3^4 \left(\int_1^2 (x+2y) dy\right) dx$

130. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^4 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} dx$
2. $\int_s^{s^3} x \ln x dx$
3. $\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx$
4. $\int_1^3 \left(x^2 - 4x + \kappa\right) dx$

131. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:



1. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\eta\mu^2 x}dx$
4. $\int_1^e x^3 \ln x dx$

132. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική της αλλαγής μεταβλητής για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$
2. $\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}dx$
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{y\ln y}dy$
4. $\int_1^e \frac{\eta\mu \ln y}{y}dy$

133. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_\pi^{2\pi} \eta\mu^2 x dx$
2. $\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)\,dx$ όπου $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ και $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της f.
3. $\int_m^n \left(mx^2 + nx\right)dx$
4. $\int_x^{\frac{1}{x}} tdt$

134. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu \;\; 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x} & \alpha\nu \;\; 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

135. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \left(|x-3| + \left|x^2 - 4\right|\right)dx$$

136. Από τις εξετάσεις του 1988, Δέσμη IV. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}dx$$

137. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_\alpha^\beta x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_\beta^0 \left(x^2 + x\sigma\upsilon\nu x\right)dx = -\frac{\beta^3}{3}$$

138. Να βρείτε τον $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\lambda} \eta\mu x dx$.

139. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε για ποιές τιμές των α, β, γ ισχύουν $f'(1) = 8$, $f(2) + f''(2) = 33$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3}$.

140. Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_x^{x+1} \left(t^2 - 4t + \frac{50}{3}\right) dt = 13$$

141. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη IV. Αν η συνάρτηση $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και ικανοποιεί την σχέση

$$\int_0^1 xg'(x)\,dx = 1993 - \int_0^1 g(x)\,dx$$

να βρείτε το $g(1)$.

142. Από το διαγωνισμό Putnam, 1973. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο ώστε $f(0) = 0$ και $0 \leq f'(x) \leq 1$ γι αόλα τα x. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x)\,dx$$

Υποδειξη: Εργασθείτε με τη συνάρτηση $h(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\,dt$.

143. Αν $\int_1^t \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx = 11$ βρείτε το $\int_1^t \left(3x^2 - 2x + 1\right) dx$.

144. Για τη συνεχή συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $f(-x) + f(x) = x^2$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

145. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2002. Μία συνεχής πραγματική συνάρτηση f ικανοποιεί την ταυτότητα

$$f(2x) = 3f(x)$$

για όλα τα x. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ βρείτε το $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

146. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{10} \frac{x}{1+|x|} dx$

147. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$$

148. Να αποδείξετε, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \eta\mu^9 x = 0$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 e^{\sigma\upsilon\nu x} dx = 2\int_0^1 e^{\sigma\upsilon\nu x} dx$$

149. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\nu} k^x \right) dx$$

150. Έστω $I_\nu = \int_0^\alpha e^{-x} x^\nu dx$

1. Να υπολογίσετε το I_1.
2. Να αποδείξετε ότι $I_\nu = \nu I_{\nu-1} - \alpha^\nu e^{-\alpha}$.
3. Να υπολογίσετε το I_3.

151. Έστω $I_\nu = \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$.

1. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu+2} = \frac{\nu+1}{\nu+2} I_\nu$.
2. Να αποδείξετε ότι

   (α′) $I_{2k} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)}\pi$

   (β′) $I_{2k+1} = 0$

152. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x + \sigma\phi x + \ln x)\, dx$.

153. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

154. Για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\alpha f(x) + \beta f(1-x) = 2\left((\beta-\alpha)x + \alpha\right)$$

για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq -\beta$ τότε $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$.

155. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

156. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_0^1 f\left(x^2\right) dx = 1$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{f\left(x^2\right)}{\alpha^x+1} dx$, $0 < \alpha \neq 1$.

Υποδειξη: Να γράψετε $I = \int_{-1}^0 \frac{f\left(x^2\right)}{\alpha^x+1} dx + \int_0^1 \frac{f\left(x^2\right)}{\alpha^x+1} dx$ και να θέσετε στο πρώτο ολοκλήρωμα $x = -u$.

157. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^x x dt$.

158. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \int_a^b \eta\mu(2tx)\, dt$ τότε $f'(x) = 2\int_a^b (\sigma\upsilon\nu 2tx)\, t\, dt$.

159. Να αποδείξετε ότι

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$$

και κατόπιν να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$.

160. Να αποδειχθεί ότι αν μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι τότε

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{\mu}{\nu}} + x^{\frac{\nu}{\mu}}\right) dx = 1$$

161. Έστω λ θετικός αριθμός και f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0, \lambda]$.

1. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\lambda \frac{f(x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx = \int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx$$

2. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx$$

είναι ανεξάρτητο της f.

3. Με την βοήθεια του προηγουμένου ερωτήματος ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx$$

162. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^2 (|x-1| + x + 1)\, dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (|x - \ln x| + |3x-2|)\, dx$$

163. 1. Έστω ότι $\sqrt{x^2-\alpha^2} = u - x$. Να αποδείξετε ότι $x = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2+u^2}{u}$.

2. Χρησιμοποιείστε τον μετασχηματισμό $\sqrt{x^2-\alpha^2} = u - x$ για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2-\alpha^2}dx$

3. Αν $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2-1}dt$ να υπολογίσετε το ελάχιστο της F.

164. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \alpha\eta\mu t$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2-x^2}dx$

165. Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_0^\alpha \left(\sigma\upsilon\nu x + \alpha^2\right) dx = \sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha^3$$

166. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_0^{\beta-\alpha} f(\alpha+x)\, dx$$

167. 1. Έστω $\alpha > 0$ και $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha - x)\, dx = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

2. Έστω $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ και $g : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- f, g συνεχείς
- για όλα τα $x \in [0, \alpha]$ ισχύει $f(\alpha - x) = f(x)$
- υπάρχει σταθερά c έτσι ώστε για όλα τα $x \in [0, \alpha]$ να ισχύει $g(x) + g(\alpha - x) = c$.

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{c}{2} \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

168. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx$.

169. Υποθέτουμε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ότι η f'' είναι συνεχής. Έστω ότι $f'(e) = f(e) = f(1) = 1$ και $\int_1^e \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2}$. Βρείτε το $\int_1^e f''(x) \ln x dx$.

170. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

171. Να αποδείξετε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = \int_0^{\alpha} (f(x) + f(-x))\, dx$

172. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 f(x)\, f'(x)\, dx = 0$ και $\int_0^1 f^2(x)\, f'(x)\, dx = 18$. Ποιό είναι το $\int_0^1 f^4(x)\, f'(x)\, dx$;

173. 1. Να βρείτε αριθμούς α, β, γ έτσι ώστε για κάθε αριθμό $x \neq 0$ να ισχύει

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + 1}$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

174. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t)\,dt$.

2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t)\,\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x > 0$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \le e^{\frac{t}{x^2}} \le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t \in [1,4]$ και $x > 0$.

   (β′) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

175. Αν $I_\nu = \int \ln^\nu x dx$ να αποδείξετε ότι

$$I_\nu = x\ln^\nu x - \nu I_{\nu-1}$$

176. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων μ, ν ισχύει

$$\int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu\,dx = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu\,dx$$

177. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$

178. Να επαληθεύσετε την ισότητα

$$\int_{\alpha+1}^{\beta+1} xe^x dx - \int_{\alpha-1}^{\beta-1} xe^{-x} dx = \beta e^{\beta+1} - \alpha e^{\alpha+1} + \beta e^{-\beta+1} - \alpha e^{-\alpha+1}$$

179. Να επαληθεύσετε την ισότητα

$$\int_1^2 \alpha^\beta d\alpha + \int_1^2 \alpha^\beta d\beta = \frac{2^{\beta+1}-1}{\beta+1} + \alpha\frac{\alpha-1}{\ln\alpha}$$

180. Έστω $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \ge 3$ ισχύει:

$$I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$$

181. Να αποδέιξετε ότι για $\alpha > 0$ και $n \ge 3$ ισχύει $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{1-x^{n-2}}{1+x^n}dx = 0$.

182. Από τις εξετάσεις του πανεπιστημίου της Οξφόρδης, 1889. Βρείτε ένα αναγωγικό τύπο για το ολοκήρωμα

$$I_\nu = \int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

όπου ο ν είναι ένας θεικός ακέραιος και στη συνέχεια υπολογίστε το $\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu^4 x dx$.

183. Από τις εξετάσεις του 1991, Δέσμη Ι. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$,

2. Να υπολογίσετε το I_5.

184. Έστω

$$I_{\nu,\mu} = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu\,dx$$

Να αποδείξετε ότι

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\mu}{\nu+1} I_{\nu+1,\mu-1}$$

185. 1. Να υπολογίσετε το $\int x^2 \ln x dx$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής

3. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

186. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \varepsilon\varphi t$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

187. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία άρτια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

1. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx = 0$
2. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \frac{1}{e^{kx}+1} dx = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$

188. Αν $\int_1^2 (f(x) + x)\, dx = 4$ να βρείτε το $\int_1^2 f(x)\, dx$.

189. 1. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(a + \beta - x)\, dx$

2. Δείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx, \quad \nu \in \mathbb{N}$·

3. Βρείτε τα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

190. Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^{\alpha} \left(2 - 4x + 3x^2\right) dx \leq \alpha$$

191. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει

$$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = \beta$$

όπου α, β είναι σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2\alpha} f(x)\, dx = \alpha\beta$$

192. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής.
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x + t)\, dt$$

193. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$
2. Αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

194. Υπενθυμίζεται ότι μία συνάρτηση f ονομάζεται **περιοδική** αν υπάρχει αριθμός $T \neq 0$ που ονομάζεται **περίοδος** της f έτσι ώστε:

- για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ είναι και $x + T \in \mathcal{D}_f$
- για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(x+T) = f(x)$.

Να αποδείξετε ότι αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο T τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: $x = T - u$

195. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{2r-x} f(t)\,dt \geq 2\int_0^r f(t)\,dt$$

196. Να αποδείχθεί ότι αν η συνεχής άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^T xg(f(x))\,dx = \frac{T}{2}\int_0^T g(f(x))\,dx$$

197. Η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Βρείτε το $\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,\sigma\upsilon\nu x dx$.

198. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\alpha) = f(\alpha)$ και $f'(\beta) = f(\beta)$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x}\left(f''(x) - 2f'(x) + f(x)\right)dx = 0$$

199. Από το διαγωνισμό Putnam, 1979. Έστω ότι $0 < a < b$. Βρείτε το

$$\lim_{t \to 0}\left(\int_0^1 (bx + a(1-x))^t\,dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

200. Για τη συνεχή συνάρτηση f είναι γνωστό ότι για όλα τα x ισχύει:

$$f(x) = P(x) + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt \quad (*)$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με ρίζα το 0.

1. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = P'(x) + P(x)$$

2. Να εξηγήσετε γιατί η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στην εύρεση της f και γιατί η συνάρτηση f που ικανοποιεί την $(*)$ είναι μοναδική.

201. Έστω ότι $0 < \alpha < \beta$ και ότι για τη συνεχή $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(xt)\,dt \geq \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ για κάθε θετικό αριθμό x. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

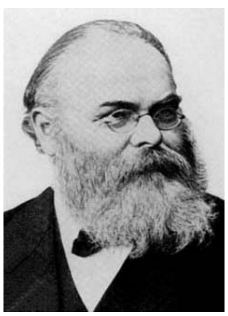
Augustin Louis Cauchy
1789-1857

202. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

2. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)}dx$.

203. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.



Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_\alpha^\beta \left(f(x) - \lambda g(x)\right)^2 dx \geq 0$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathrm{A}\lambda^2 + \mathrm{B}\lambda + \Gamma \geq 0$$

όπου

$$\mathrm{A} = \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx,\ \ \mathrm{B} = -2\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx,\ \ \Gamma = \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$$

Viktor Yakovlevich
Bunyakovsky
1804-1889

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\right)\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx\right)$$

(Ανισότητα Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky)

204. Θεωρούμε f, g συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε x να ισχύουν:

- $f(-x) = f(x) + \kappa$
- $g(-x) = -g(x) + \lambda$

όπου οι κ, λ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)\,g(x)\,dx = \lambda\int_0^\alpha f(x)\,dx - \kappa\int_0^\alpha g(x)\,dx + \kappa\lambda\alpha$$

205. Έστω ν θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός y έτσι ώστε

$$y^{2\nu+1} + y = x$$

και επομένως ορίζεται μία συνάρτηση $x \to f(x) = y$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$f^{2\nu+1}(x) + f(x) = x \qquad (1)$$

για κάθε x. Κατόπιν:

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

5. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

6. Να εκφράσετε ως παράσταση της f το $\int_0^x f(t)\,dt$.

5.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

206. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2004. Έστω $P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$. Έστω $P^{[1]}(x) = P(x)$ και για $\nu \geq 1$ έστω $P^{[\nu+1]}(x) = P^{[\nu]}(P(x))$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 P^{[2004]}(x)\,dx$.

Johan Ludwig William Valdemar Jensen 1859-1925

207. (Η ανισότητα του Jensen) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να αποδειχθεί ότι:

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x))\,dx$$

208. (Οι ανισότητες του Young) Έστω $f : [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ μία μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) > 0$ για όλα τα x και $f(0) = 0$. Θεωρούμε $\alpha \in [0, \gamma]$, $\beta \in [0, f(\gamma)]$. Να θεωρήσετε ως δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής για να δείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)\,dx \geq \alpha\beta$$

William Henry Young 1863-1942

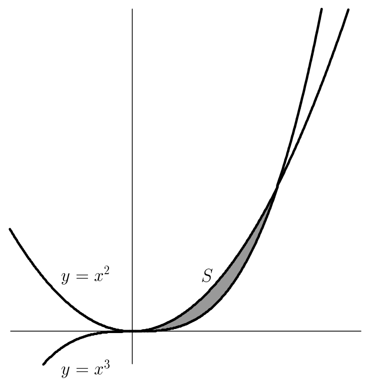
Να αποδείξετε ότι το "ίσον" ισχύει μόνο όταν $\beta = f(\alpha)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για τους θετικούς αριθμούς α, β, p, q με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ισχύει:

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \geq \alpha\beta$$

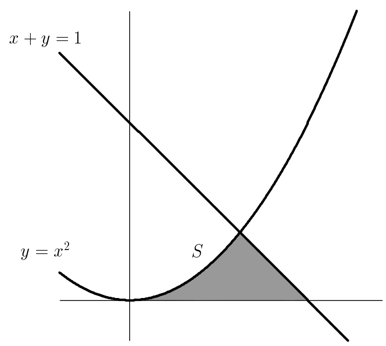
6 Εμβαδά

6.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

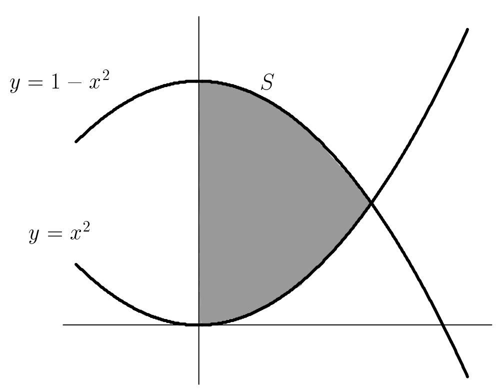
209. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



210. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



211. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S στο παρακάτω σχήμα:



212. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\ln x$ και $\ln^2 x$.

213. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 2x - 1$ και την ευθεία $x = 0$.

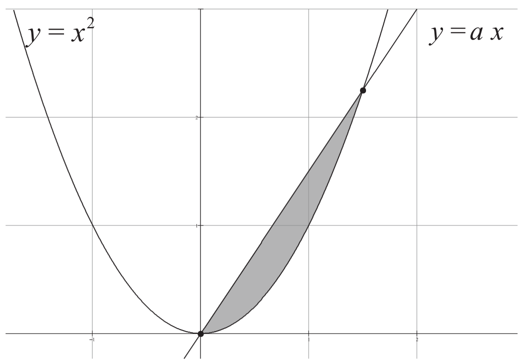
214. Από τις εξετάσεις I.I.T, Ινδία, 1989. Να βρείτε το μεγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = x(x-1)^2, \quad 0 \le x \le 2$$

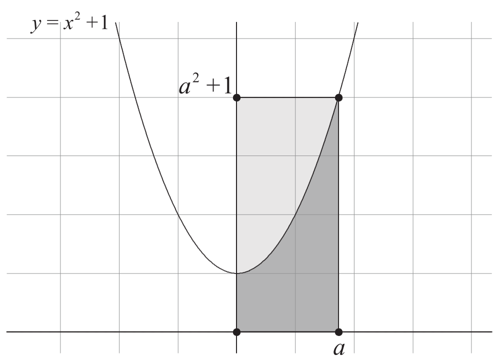
Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x(x-1)^2$, τον y-άξονα και την ευθεία $y = 2$.

215. Ποιό είναι το εμβαδόν που περικλείουν οι γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$, $y = \sqrt{|x|}$;

216. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του σχήματος είναι 1. Ποιό είναι το α;

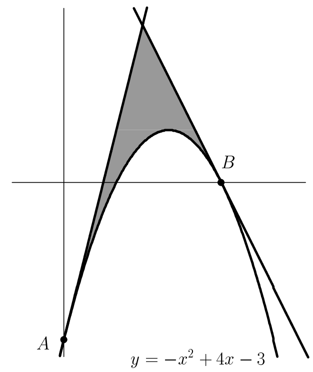


217. Από το μαθηματικό διαγωνισμό Harvard-MIT, 2002. Προσδιορίστε τη θετική τιμή α που είναι τέτοια ώστε η παραβολή $y = x^2 + 1$ να διχοτομεί το εμβαδόν του ορθογωνίου με κορυφές $(0,0)$, $(\alpha,0)$, $(0,\alpha^2+1)$, και (α,α^2+1).

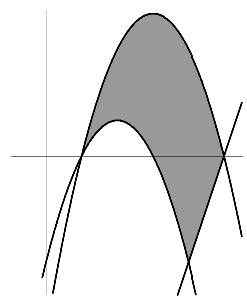


218. Έστω $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- την $\mathcal{C}_f$
- την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(0,-3)$ και
- την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $B(3,0)$



219. Το χωρίο του σχήματος περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων



$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$g(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$h(x) = 3x - 15$$

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του.

220. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ και τον $x-$άξονα.

221. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$, και των ευθειών με εξισώσεις $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.
3. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(\alpha)$ του ανωτέρω χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

6.2 Β′ ΟΜΑΔΑ

222. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^\nu$, $g(x) = \sqrt[\nu]{x}$.

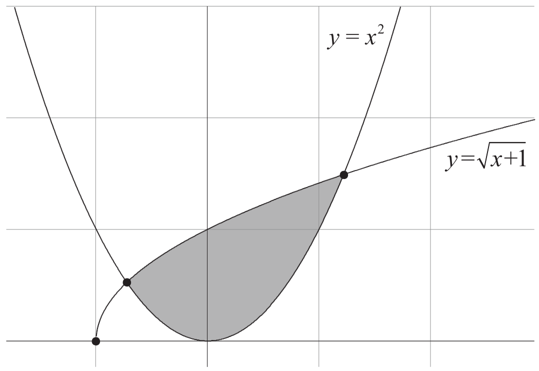
223. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le f(x)$.

224. 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\sqrt{x+1} = x^2$$

έχει ακριβώς δύο (πραγματικές) ρίζες.

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου στο παρακάτω σχήμα



είναι ίσο με

$$\frac{1}{3}\left(q_2 - q_1\right)\left(q_1^2 + 2q_1 + q_2 q_1 + 2q_2 + q_2^2\right)$$

όπου $q_1 < q_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α΄).

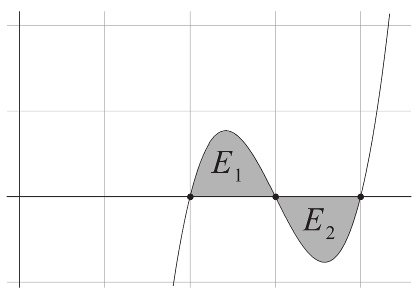
225. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Συμβολίζουμε με $E(a)$ το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την $x = \alpha$. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \frac{1}{\alpha^2} E(\alpha)$$

226. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση ενός τριτοβαθμίου πολυωνύμου με ρίζες 2, 3, 4, Να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.



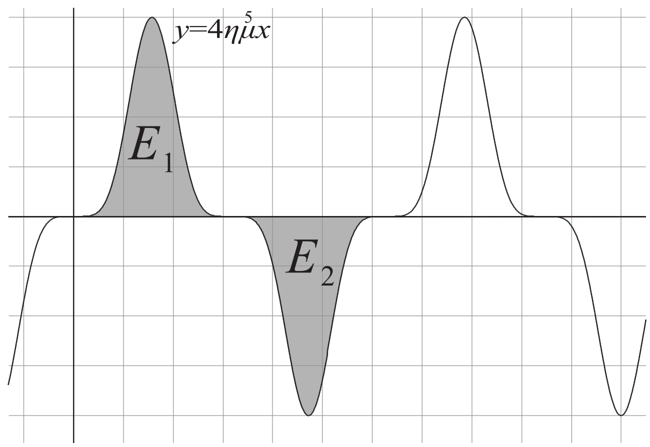
Προσπαθείστε να γενικεύσετε.

227. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S του χωρίου που περικλείεται από τις $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

228. Έστω $f(x) = e^x$. Να βρείτε για ποια τιμή του p το εμβαδόν S_1, που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f$, $y = 0$, $x = 0$,$x = p$ είναι ίσο με το εμβαδόν S_2 που περικλείεται από τις $\mathcal{C}_f$, $y = 0$, $x = 1$,$x = p$.

229. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x - \lambda x^2,\ g(x) = \frac{x^2}{\lambda}$ είναι μέγιστο;

230. Για το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.



231. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Έστω $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, τον y-άξονα και την ευθεία $x = t$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t)$.

232. Από τις εξετάσεις του 2006. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
3. (α΄) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

   (β΄) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

233. Από τις εξετάσεις του 1989, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.
2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy.

234. Για ποια τιμή του λ η ευθεία που:

- διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ και
- έχει συντελεστή διευθύνσεως λ

σχηματίζει με την καμπύλη $y = x^2 + 1$ χωρίο εμβαδού 6;

235. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$f''(x) - g''(x) = 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{ και } f(2) = g(2)$$

1. Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

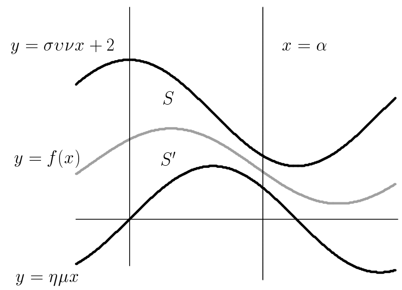
236. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$m(x) = \sigma\upsilon\nu x + 2,$$

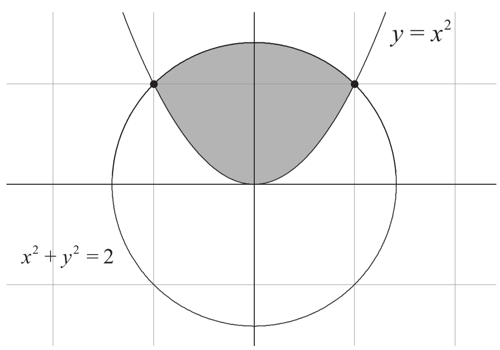
$$n(x) = \eta\mu x$$

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f που έχει την ιδιότητα:

- Για κάθε $\alpha > 0$ το εμβαδόν S που περικλείεται από τις $x = 0$, $x = \alpha$, $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}_f$ είναι ίσο με το εμβαδόν S' που περικλείεται από τις $x = 0$, $x = \alpha$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_f$.



237. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου:



238. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Έστω M τυχόν σημείο της $\mathcal{C}$ και M_1, M_2 οι προβολές του M στους άξονες $x'x, y'y$ αντιστοίχως. Ονομάζουμε E_1, E_2 τα εμβαδά του μικτογράμμου OM_1M και του παραλληλογράμμου OM_1MM_2. Να αποδείξετε ότι:

$$E_1 = \frac{1}{\alpha + 1} E_2$$

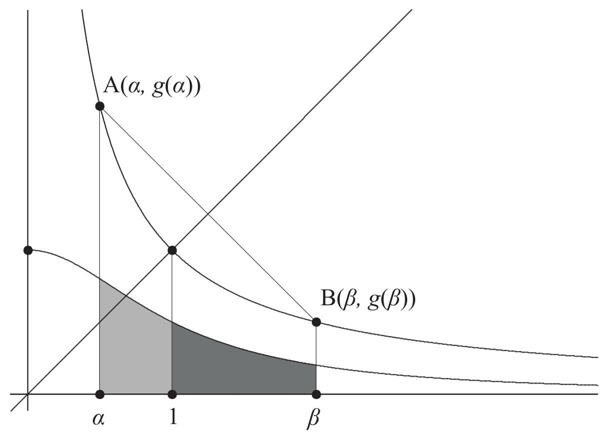
239. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

και την ευθεία $y = x$.

1. Δείξτε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι κάτω από την $\mathcal{C}_g$.

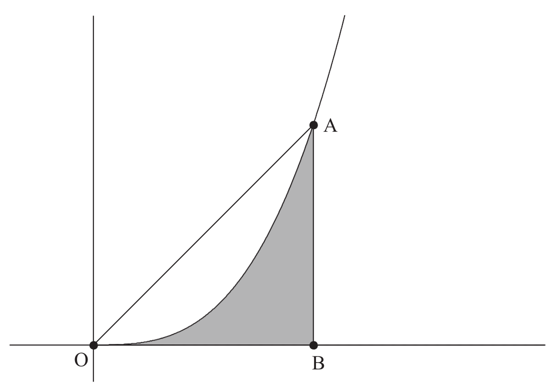
2. Σε κάθε $\alpha \in (0,1)$ αντιστοιχούμε το σημείο $\mathrm{A}\,(\alpha, g\,(\alpha))$. Από το Α φέρνουμε κάθετη στην $y = x$. Δείξτε ότι αυτή θα τέμνει πάντοτε την $\mathcal{C}_g$ σε ένα και μοναδικό σημείο $\mathrm{B}\,(\beta, g\,(\beta))$ με $\beta \in (1, +\infty)$.



3. Δείξτε ακόμη ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τις $x = \alpha$, $x = 1$, $y = 0$ και $\mathcal{C}_f$ είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από τις $x = \beta$, $x = 1$, $y = 0$ και $\mathcal{C}_f$.

240. Υπάρχουν άπειρες, το πλήθος, συνεχείς συναρτήσεις f που ορίζονται στο $[0, +\infty)$ και οι γραφικές παραστάσεις τους περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο και διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για παράδειγμα μερικές είναι οι $f\,(x) = e^{x-1}$, $f\,(x) = \ln(x+1)$, $f\,(x) = x^2$, $f\,(x) = \sqrt{x}$ όλες για $x > 0$. Ζητείται να βρείτε ποιές από αυτές έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

- Για κάθε σημείο $A \in C_f$, με προβολή στον $x'x$ το σημείο Β, το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με το διπλάσιο του μικτογράμμου χωρίου ΟΑΒ.

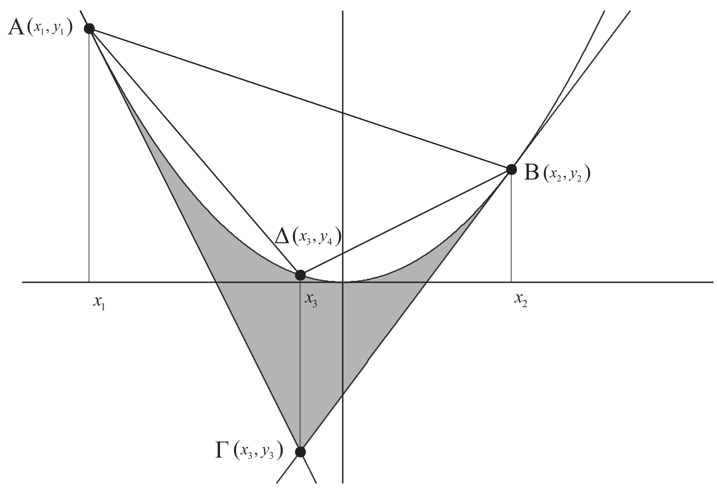


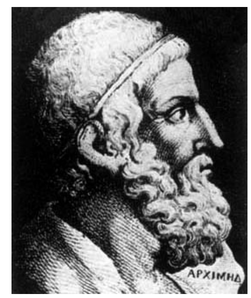
241. Από τις εξετάσεις του 1991, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f\,(x) = \begin{cases} e^x - e & , \quad x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = e$.

242. Έστω $\mathcal{C}$ η παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2$ $(\alpha > 0)$. Έστω A, B δύο διάφορα σημεία της $\mathcal{C}$. Έστω Γ το σημείο τομής των εφαπτομένων της $\mathcal{C}$ στα A, B. Έστω τέλος Δ εκείνο το σημείο της παραβολής που έχει την ίδια τετμημένη με το Γ.





Αρχιμήδης
287-212 π.Χ.


Bonaventura Francesco Cavalieri
1598-1647

Συμβολίζουμε:

- Με E_1 το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου που περικλείεται από τις ΑΓ, ΒΓ και την $\mathcal{C}$.
- Με E_2 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
- Με E_3 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.
- Με E_4 το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου που περικλείεται από την ΑΒ και την $\mathcal{C}$.

Να αποδείξετε ότι:

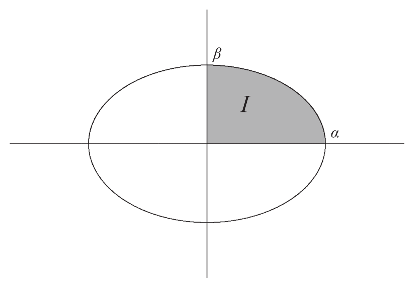
1. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$
2. Η εφαπτομένη της $\mathcal{C}$ στο Δ είναι παράλληλη στην ΑΒ.
3. Από όλα τα σημεία του παραβολικού τόξου ΑΒ το Δ είναι εκείνο που απέχει από την ΑΒ τη μεγαλύτερη απόσταση.
4. **(Αρχιμήδης)** $E_4 = \frac{4}{3}E_3$
5. **(Cavalieri)**[1] $E_1 = \frac{1}{3}E_2$

[1] Ο Cavalieri υπήρξε μαθητής του Γαλιλαίου.

6.3 Γ′ ΟΜΑΔΑ

243. Στην άσκηση αυτή θα υπολογίσετε το εμβαδόν της έλλειψης και του υπερβολικού χωρίου.

1. **Εμβαδόν της έλλειψης:** Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Για να βρούμε το εμβαδόν της αρκεί να βρούμε το εμβαδόν της που περικλείεται στο πρώτο τεταρτημόριο και να πολλαπλασιάσουμε επί 4. Το χωρίο αυτό περικλείεται από την γραφική παράσταση της $y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2},\ \ x\in[0,\alpha]$ και τον $x'x$. Το εμβαδόν του είναι ίσο με το $I=\int_0^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$. Για να υπολογίσετε αυτό το ολοκλήρωμα να θέσετε $x=\alpha\eta\mu t$. Θα βρείτε $I=\frac{\pi\alpha\beta}{4}$. Τελικά το εμβαδόν της έλλειψης είναι $E=\pi\alpha\beta$.



2. **Εμβαδόν υπερβολικού χωρίου:** Έστω η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Για να υπολογίσουμε το εμβδόν του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή και την ευθεία $x=t>\alpha$ αρκεί να υπολογίσουμε το διπλάσιο του ολοκληρώματος $I=\int_{\alpha}^{t}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}dq$. Για τον υπολογισμό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε

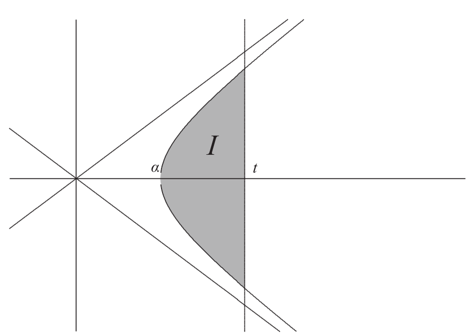
   (α′) Την αντικατάσταση $u=\frac{\alpha}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ή

   (β′) την αντικατάσταση $u=\frac{\alpha}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ ή

   (γ′) την αντικατάσταση $u=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu x}$

   Πρέπει να βρείτε

$$I=\frac{\beta}{2\alpha}\left(t\sqrt{t^2-\alpha^2}-\alpha^2\ln\left(t+\sqrt{(t-\alpha)(t+\alpha)}\right)+\alpha^2\ln\alpha\right)$$



244. Μήκος καμπύλης. Στην άσκηση αυτή μπορείτε να δείτε, πώς, με μικρή τροποποίηση των ιδεών που χρησιμοποούμε για τον υπολογισμό των εμβαδών μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη καμπυλών. Θα εργασθούμε στην ειδική περίπτωση μίας καμπύλης $y = f(x)$ όπου η $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι συνεχής. Έστω $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$. Θα βρούμε το μήκος L της καμπύλης από το $A = (\alpha, f(\alpha))$ στο $B = (\beta, f(\beta))$.

Για το σκοπό αυτό χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν υποδιαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Έχουμε έτσι τους αριθμούς

$$x_0 = \alpha, \qquad x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad \ldots \quad , x_\nu = \alpha$$

και με τη βοήθεια τους τα σημεία

$$X_0 = A = (x_0, f(x_0)), \qquad X_1 = (x_1, f(x_1)), \quad \ldots \qquad X_\nu = B = (x_\nu, f(x_\nu))$$

Όταν το ν αυξάνει απεριόριστα δηλαδή όταν $\nu \to +\infty$ το μήκος της τεθλασμένης $X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu$ τείνει στο L δηλαδή

$$\lim_{\nu \to +\infty} X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = L$$

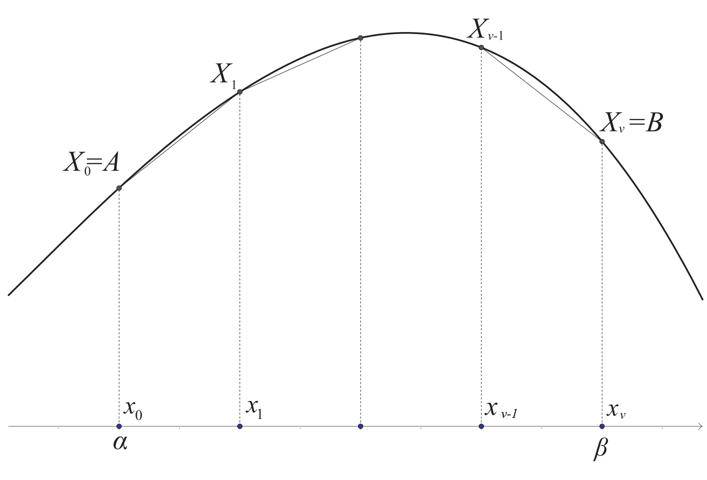
Αλλά
$X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = (X_0X_1) + (X_1X_2) + \ldots + (X_{\nu-1}X_\nu) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (f(x_0) - f(x_1))^2} +$
$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2} + \ldots + \sqrt{(x_{\nu-1} - x_\nu)^2 + (f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu))^2}$
Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

βρίσκουμε ότι

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1)$$
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_1 - x_2)$$
$$\ldots$$
$$f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu) = f'(\xi_\nu)(x_{\nu-1} - x_\nu)$$

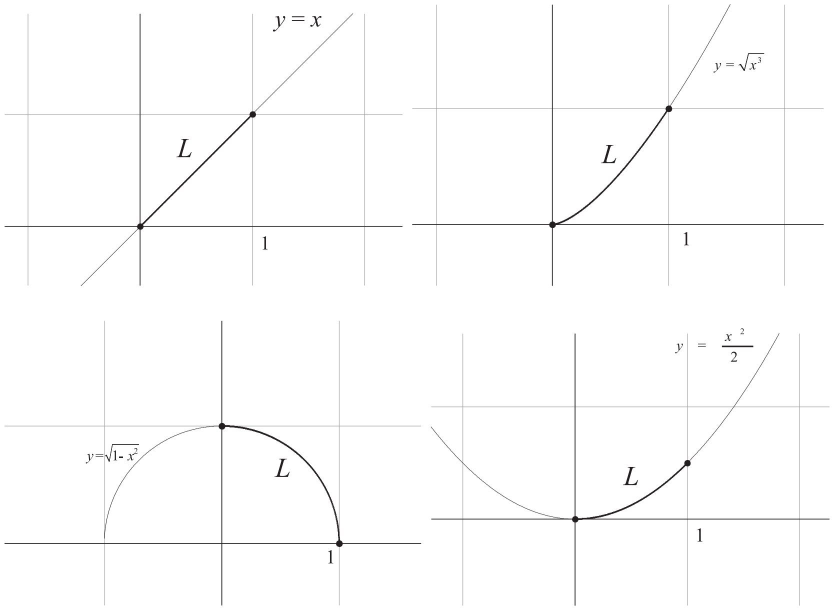
Άρα
$X_0X_1 \ldots X_{\nu-1}X_\nu = |x_0 - x_1| \sqrt{1 + (f'(\xi_1))^2} + \ldots + |x_{\nu-1} - x_\nu| \sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2} =$
$= \frac{\beta-\alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$
Επομένως $L = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\beta-\alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f(x))^2} dx$



Άρα

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$$

Εφαρμόστε τον παραπάνω τύπο για να βρείτε το μήκος L στις ακόλουθες περιπτώσεις:



Υποδειξη: Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ να θέσετε $x = \varepsilon\varphi t$.

7 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

245. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\int f'(x)\,dx =$
2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' =$
3. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' =$
4. $\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)' =$
5. $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx =$
6. $\int_\alpha^x f'(t)\,dt =$

246. Για μία συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \geq \frac{1}{3} \geq \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Να αποδείξετε ότι

1. $\int_0^1 (f(x) - x)^2\,dx \leq 0$
2. $f(x) = x$ για κάθε x

247. Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = 1 + \ln x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$$

248. Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και

$$F(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt$$

Να αποδείξετε ότι $F'(x) = f(x+\alpha) - f(x-\alpha)$.

249. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right)$$

250. Να βρείτε τον α αν είναι γνωστό ότι

$$\int_{\alpha^3 - 6}^{6\alpha^2 - 11\alpha} e^{x^2} dx = \int_0^{2\pi} \eta\mu(3x)\,dx$$

251. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \ln t dt$$

και μετά το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} e^t \ln t dt$$

252. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \frac{\eta\mu t}{t} dt$$

253. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $f(x) > 0$ για όλα τα x
- $\int_0^3 f\left(\frac{1}{3}xu\right) du = f(x)$
- $f(1) = e^2$

254. Από τις εξετάσεις του 2001. Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύεουν οι σχέσεις:
i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι ισχύει
$$f'(x) = -2x f^2(x)$$
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

3. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(xf(x)\,\eta\mu 2x\right)$

255. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει
$$(f \circ g)(x) \le x \le (g \circ f)(x)$$
για όλα τα x τότε $f = g^{-1}$.

2. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει
$$\varphi(\sinh(x)) \le x \le \sinh(\varphi(x))$$
για όλα τα x, όπου
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
είναι το **υπερβολικό ημίτονο**.

   (α′) Να βρείτε την φ και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

   (β′) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

256. Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x$$
και $\mathcal{C}_f$ η γραφική της παράσταση.

1. Να βρείτε τα διαστήματα όπου η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ που διέρχεται από το σημείο $P(2,2)$.

257. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Έστω f μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \ge 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$g(-3)\,g(0) < 0$$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$g(x) = 0$$
έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

258. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\int_x^{x+1} \ln t dt = ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} - 1$$

259. Από τις εξετάσεις του 2002.

1. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\ \ x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

(α′) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

(β′) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

(γ′) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$$

260. Απο το διαγωνισμό του ΑΣΕΠ, 2002 (Μαθηματικοί). Αν $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = \sqrt{\ln x}$ και $I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e g(x)\,dx$ τότε:

1. $I = 1$
2. $I = e^{-1}$
3. $I = e$
4. $I = e^2$

261. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^3}$$

262. Να αποδείξετε ότι αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε

$$\int_0^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} f(t)\,dt \le \frac{\int_0^\kappa f(t)\,dt + \int_0^\lambda f(t)\,dt}{2}$$

263. Η γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x}\eta\mu x, \quad x \ge 0$$

τέμνει τον άξονα xx' στα άπειρα το πλήθος σημεία

$$M_k(k\pi,\ 0), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Ποιο είναι άραγε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τον xx';

264. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της $g(x) = \int_2^x \frac{t^2-2t-1}{(t-1)^2}dt$

265. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και τέτοια ώστε

$$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x)$$

για κάθε x.

1. Να βρεθεί η $f(x)$.

2. Να βρεθεί η
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

3. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, F.

266. Από τις Εξετάσεις του 1994, Δέσμη IV. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει

$$\int_0^2 \left[xf''(x) + 3f'(x)\right] dx = -\frac{8}{3}$$

να υπολογίσετε το $f(2)$.

267. Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^x (3t-1)\,dt = 1$

268. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\int_0^\alpha \eta\mu\sqrt{x}dx}{\alpha^3}$$

269. Θεωρούμε $\alpha < \beta$ και δύο συνεχείς συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τέτοιες ώστε για όλα τα x ισχύει

$$f(\alpha - x) + f(\beta + x) = g(\alpha - x) + g(\beta + x)$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Υποδειξη: Θα ισχύει $\int_0^{\alpha-\beta} (f(\alpha - x) + f(\beta + x))dx = \int_0^{\alpha-\beta} (g(\alpha - x) + g(\beta + x))dx$

270. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \alpha\nu \;\; x \leq 1 \\ 1 + \ln x & \alpha\nu \;\; x > 1 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει λύση.

271. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Έστω

$$I=\int_0^{\pi}\left(f\left(x\right)+f''\left(x\right)\right)\eta\mu x dx$$

Να αποδείξετε ότι

$$I=f\left(0\right)+f\left(\pi\right)$$

272. Έστω

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\leq 1\\ \frac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την f και μετά να χαράξετε την γραφική της παράσταση.
2. (α′) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=xf(x)$ είναι **φραγμένη** δηλαδή αν υπάρχουν αριθμοί α,β έτσι ώστε να ισχύει $\alpha\leq g\left(x\right)\leq\beta$ για όλα τα x.

   (β′) Να λύσετε την εξίσωση

$$\int\limits_{x}^{x+1} f(t)dt=\frac{1}{6}$$

273. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

1. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$ και οι f,g είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει $f'\left(x\right)\geq g'\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$.
2. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$ και οι f,g είναι συνεχείς τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x\right)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g\left(x\right)dx$.
3. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$ και οι f,g είναι συνεχείς τότε ισχύει $\int f\left(x\right)dx\ \geq\ \int g\left(x\right)dx$ (Δηλαδή για κάθε αρχική F της f και για κάθε αρχική G της g ισχύει $F\left(x\right)\geq G\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$).
4. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$ και οι f,g είναι συνεχείς τότε υπάρχουν αρχική F της f και αρχική G της g ώστε $F\left(x\right)\geq G\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$.
5. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$ υπάρχουν τα όρια των f,g στο x_0 τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)\geq\lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)$.

274. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α,β ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(e^x-e^{\beta}+e^x x-e^x\alpha\right)dx=0$$

275. Από τις εξετάσεις του 2000, Δέσμη IV. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα:

$$\int_0^{x}\left(1+t^2\right)f\left(t\right)dt=x^2+\int_0^{1}6x\left(t^2+t\right)dt\qquad x\in\mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\frac{2x+5}{x^2+1}$

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(0,f\left(0\right)\right)$.

276. Για την συνεχή συνάρτηση $f:\left[\alpha,\beta\right]\rightarrow\mathbb{R}$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}f\left(t\right)dt=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{x}f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}$.

277. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f\left(x\right)+e^x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

278. Έστω μία συνεχής πραγματική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(x\right)>0$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta\in\left(0,1\right)$ ισχύει:

$$\int_0^{\beta}f\left(x\right)dx\geq\beta\int_0^{\beta}f\left(x\right)dx$$

279. Για μία συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$ ισχύει

$$x+\int_0^x f\left(t\right)dt=\left(x+1\right)f\left(x\right)$$

1. Να βρεθεί η $f(x)$.

2. Να βρεθεί η $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$.

280. Απο τον διαγωνισμό του ΑΣΕΠ, 2000 (Μαθηματικοί). Να αποδείξετε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη[2] συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών α,β ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[f\left(x\right)-f\left(\alpha+\beta-x\right)\right]dx=0$$

281. Απο τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη Ι. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4 \text{ με } x>0$$

1. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

2. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\int_x^{x+1}f\left(t\right)dt$$

282. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και

$$g\left(x\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f\left(t\right)-x\right)^2dt$$

[2]για σας: συνεχή

1. Να αποδείξετε ότι η g γίνεται ελάχιστη όταν

$$x = \frac{\int_\alpha^\beta f\left(t\right)dt}{\beta - \alpha}$$

2. Να αποδείξετε ότι $g\left(x\right) > 0$ για κάθε x.

283. Για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g, h ισχύει $\int_0^1 f\left(x\right)dx = \alpha_1$, $\int_0^1 g\left(x\right)dx = \alpha_2$, $\int_0^1 h\left(x\right)dx = \alpha_3$ όπου $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0,1)$ ώστε $f\left(\alpha\right) + g\left(\alpha\right) + h\left(\alpha\right) = \alpha$

Υποδειξη: Να θεωρήσετε την συνάρτηση $\varphi\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right)dt + \int_0^x f\left(t\right)dt + \int_0^x f\left(t\right)dt - \frac{x^2}{2}$

284. Απο τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη Ι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F\left(x\right) = \int_\alpha^\beta f\left(x - t\right)dt,\ x \in \mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $F'\left(x_0\right) = 0$ τότε $F\left(x\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

285. Απο τις εξετάσεις του 2003. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
2. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

286. Να αποδείξετε ότι αν για κάθε $x \geq 0$ είναι $f'\left(x\right) > 0$ και $F\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right)dt$ τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}F\left(x\right) < F'\left(x\right)$.

287. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $2f\left(x\right) + 3f\left(-x\right) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}}$.

1. Να βρείτε τον τύπο της f.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f\left(x\right)dx$.

288. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση $g\left(x\right) = \int_0^1 f\left(tx\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

289. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ τότε ισχύει $\int_0^1 f\left(1 - x\right)dx = \int_0^1 f\left(x\right)dx$.

290. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{-t^2}dt}{x - 1}$$

Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα του αριθμητή.

291. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = \int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\alpha}\,dx$.

292. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη Ι. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x)>0,\ x>0$$

$$f'(x)+2xf(x)=0,\ x>0$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.
2. Να δείξετε ότι
$$\frac{x-1}{2x^2}f(x)<\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2},\ x>1$$
3. Να βρείτε τη συνάρτηση
$$F(x)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)\,dt,\ x>1$$
4. Να αποδείξετε ότι
$$2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$$
για κάθε x μεγαλύτερο του ένα.

293. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

- $f'(x)>x$ για κάθε $x>0$
- $f(0)=0$

Pafnuty Lvovich Chebyshev
1821 - 1894

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\int_0^{\alpha}xf^3(x)\,dx\geq\left(\int_0^{\alpha}xf(x)\,dx\right)^2$

294. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[1,4]$, για την οποία να ισχύουν $f'(x)\geq 3$, $f(1)=-1$ και $f(4)=7$.

295.
1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha-x)=f(\alpha)-f(x)$ για όλα τα x. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=\frac{\alpha f(\alpha)}{2}$.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\varepsilon\varphi x)\,dx$.

296. Η ανισότητα του Chebyshev. Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας και $\alpha<\beta$ τότε ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta}g(x)\,dx\right)\leq(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,g(x)\,dx$$

297. Από τις εξετάσεις του 2004. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^xf(x)$ όπου η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

2. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$.

298. Έστω g μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $(0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\xi > 0$ ισχύει
$$\int_1^{\xi} \frac{f(x) + 2x}{1 + x^2} dx + \int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 2x}{1 + x^2} dx = 2 \ln \xi$$

Υποδειξη: Στο δεύτερο ολοκλήρωμα του α′ μέλους να θέσετε $u = \frac{1}{x}$.

299. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και μή σταθερή συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι κάποιο κλειστό διάστημα έστω $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$.

1. Να αποδείξετε ότι[3]
$$f(x_\varepsilon)(\beta - \alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < f(x_\mu)(\beta - \alpha)$$

2. Από την προηγούμενη σχέση συνάγουμε ότι
$$f(x_\varepsilon) < \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\beta - \alpha} < f(x_\mu)$$
Βάσει αυτής δείξτε ότι [4] υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$
Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την παραγωγίσιμη $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

3. Αν έχετε δύο συνεχείς συναρτήσεις σκεφθείτε τι μπορείτε να επιτύχετε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.[5]

300. Από τις εξετάσεις του 2004. Έστω η συνεχης συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει
$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|\, f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x - 1) \geq 0 \quad ,$$
όπου $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

[3] Δείτε προσεκτικά την άσκηση Γ10ii. σελ. 353 και εντοπίστε ομοιότητες - διαφορές πέρα φυσικά από το συμβολισμό $f(x_\varepsilon)$ αντί m και $f(x_\mu)$ αντί M.

[4] Πρόκειται για ειδική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

[5] Δείτε την συλλογή «Παράγωγοι» ενότητα 3.2

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.
2. Να αποδέιξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.
3. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re\left(z^2\right) = -\frac{1}{2}$.
4. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

301. Από τις εξετάσεις του 2005. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

1. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y = \lambda e x$
   Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M.
3. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικελείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι
   $$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$
4. Υπολογίστε το
   $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$$

302. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2005. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

1. Να δείξετε ότι
   (α′) $f(0) = 0$
   (β′) $f'(0) = 1$
2. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε
   $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2 + \left(f(x)\right)^2} = 3$$
3. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
   (α′) $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$
   (β′) $\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$

303. 1. Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^1 x(x+t)\,dx = 0$

2. Να αποδείξετε ότι αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τότε $f(x)=0$ για κάθε x.

3. Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

όταν g είναι οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις 1, x, x^2. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε x.

304. Έστω

$$f(x)=\left[\int_0^x e^{-t^2}dt\right]^2$$

$$g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}dt$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(x)+g'(x)=0$, για κάθε x
2. $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

305. Από τις εξετάσεις του 2005. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x)=e^{x-f(x)}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

1. Να δειχθεί ότι:
$$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$$

2. Να βρεθεί το:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt$ και $g(x)=\frac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

4. Δείξτε ότι η εξίσωση
$$\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt=\frac{1}{2008}$$
έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

306. Από τις εξετάσεις του 1998, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=2^{12}\left(e^{-4x}-e^{-\alpha x}\right),\quad x\geq 0$$

όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = h(0) = 0$.
2. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)$.
3. Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(x)$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1, x_2.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $M = \frac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h(x)\,dx$ όταν $\alpha = 8$.

307. Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή, τέτοια ώστε $f(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=\alpha$ και $x=\beta$. Έστω M μέγιστη τιμή της f.

1. Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f''(x)\,dx \leq 0$.
2. Έστω x_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του (α,β) που μηδενίζεται η f' (τέτοια σημεία υπάρχουν από το θεώρημα του Rolle). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0,\beta)$ έτσι ώστε
$$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) \geq \frac{4f(x_0)}{\beta-\alpha}$$
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν p,q με $\alpha < p < q < \beta$ τέτοια ώστε
$$f'(p) - f'(q) \geq \frac{4M}{\beta-\alpha}$$
4. Να αποδείξετε ότι
$$\int_\alpha^\beta \frac{|f''(x)|}{M+f(x)}dx \geq \frac{2}{\beta-\alpha}$$

308. Από τις εξετάσεις του Γαλλικού Baccalauréat, 1986. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

1. (α΄) Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης εφαπτομένη;
   (β΄) Να υπολογίσετε το I.
2. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ καί ότι για όλα τα x από αυτό το διάστημα ισχύει
$$f'(x) = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$
   (β΄) Με τη βοήθεια των προηγουμένων υπολογισμών να βρείτε μία σχέση που συνδέει τα I, J και στη συνέχεια να υπολογίσετε το J.

309. Από τις εξετάσεις του Γαλλικού Baccalauréat, 2006.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{1-x}$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική της παράσταση σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η μονάδα μέτρησης είναι $2cm$.

(α′) Να βρείτε τα όρια της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Πώς ερμηνεύονται γραφικά τα συμπεράσματα σας;

(β′) Να αιτιολογήσετε γιατί η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε την παράγωγο της f.

(γ′) Να κάνετε ένα πίνακα μεταβολών της f καθώς και τη γραφική της παράσταση.

2. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος. Έστω $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{1-x} dx$.

   (α′) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα $I_{\nu+1}, I_\nu$.

   (β′) Να υπολογίσετε το I_1 και μετά το I_2.

   (γ′) Να ερμηνεύσετε γραφικά τον αριθμό I_2 σε σχέση με τη γραφική παράσταση του ερωτήματος 1) γ

3. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ και κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $x^\nu \le x^\nu e^{1-x} \le e x^\nu$.

   (β′) Με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής να βρείτε το όριο του I_ν όταν το ν τείνει στο $+\infty$. [6]

310. Από το διαγωνισμό Putnam, 2005. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: $x = \frac{1-u}{1+u}$

311. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(1) = 2007$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα x, y

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_x^{x+m} f(t)\, dt = m f(x) + \int_0^m f(t)\, dt$$

3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = f'(0)$.
5. Να βρείτε την f.

312. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη IV. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι :

1. $f(x) - f(\alpha) \le f'(x)(x-\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
2. $2\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$

[6] Η ερώτηση αυτή ζητάει όριο ακολουθίας που δε θα έχετε δυσκολία να το απαντήσετε

313. Αν η f είναι όπως στην άσκηση 312 δείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

Να δώσετε μία γεωμετρική ερμηνεία όταν η f παίρνει μη αρνητικές τιμές.

314. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\int_{(x-1)(x-3)}^{(x-2)(x-4)} \ln(xt)\,dt$$

315. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1977. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$F(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-k\sigma\upsilon\nu^2 x}}dx, \qquad 0 \le k < 1$$

είναι γνησίως αύξουσα.

316. Έστω $f(y) = e^{-x^2y^2}$, $y > 1$.

1. (α′) Δείξτε ότι $|f'(y)| \le 2$.

   (β′) Δείξτε ότι για κάθε y, y_0 ισχύει $|f(y) - f(y_0)| \le 2|y - y_0|$.

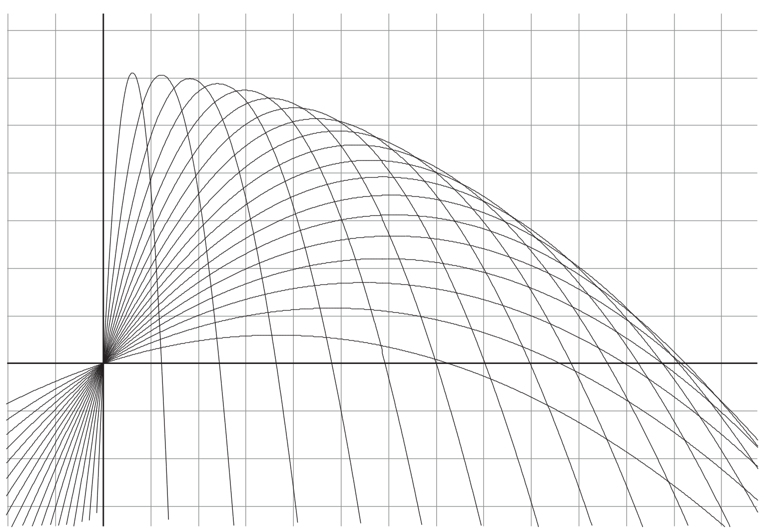
2. Θεωρούμε $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

   $$F(y) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2y^2}dx$$

   είναι συνεχής.

317. Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$f_k(x) = -\frac{2}{49k^2}x^2 + \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}x\ , \qquad k \in [0,1]$$



1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f_k(x)$.
2. Ποια από τις $f_k(x)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το μεγαλύτερο εμβαδόν;

318. Από τις εξετάσεις του Πανεπιστημίου του Berkeley, 1980. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_{\eta\mu x}^{\sigma\upsilon\nu x} e^{t^2+xt}dt$$

Βρείτε την $F'(0)$.

319. Από τις εξετάσεις του 2007. Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt, \qquad x \in [0,1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt, \qquad x \in [0,1]$$

1. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
2. Να αποδειχθεί ότι:
   $$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$
   για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:
   $$\frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$$
   για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
4. Να βρεθεί το όριο:
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu^2 t dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}$$

320. Από τις εξετάσεις του 2008. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = \left(10x^3 + 3x\right)\int_0^2 f(t)\,dt - 45$$

1. Να αποδείξετε ότι
   $$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$
2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
   $$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

3. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (1) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (2) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-2g\left(x\right)+g\left(x-h\right)}{h^2}=f\left(x\right)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

(α′) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

(β′) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

321. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)\,f\left(t\right)dt=0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H\left(x\right)=\int_0^x tf\left(t\right)dt,\qquad x\in[0,2]$$

$$G\left(x\right)=\begin{cases}\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f\left(t\right)dt, & x\in(0,2]\\ 6\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0\end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ και ότι ισχύει
$$G'\left(x\right)=-\frac{H\left(x\right)}{x^2},\qquad 0<x<2$$
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha\in(0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει
$$\alpha\int_0^{\xi} tf\left(t\right)dt=\xi^2\int_0^{\alpha} f\left(t\right)dt$$

322. Από τον Ετήσιο Διαγωνισμό Απειροστικού Λογισμού, ΗΠΑ, 1999. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{4+t^2}dt}{x^3}$.

323. Από τον Ετήσιο Διαγωνισμό Απειροστικού Λογισμού, ΗΠΑ, 2001. Υποθέτουμε ότι οι f, f' και f'' ορίζονται στο $[0,\ln 2]$, ότι η f'' είναι συνεχής, ότι $f\left(0\right)=0$, $f'\left(0\right)=3$, $f\left(\ln 2\right)=6$, $f'\left(\ln 2\right)=4$ και $\int_0^{\ln 2}e^{-2x}f\left(x\right)dx=3$. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\ln 2}e^{-2x}f''\left(x\right)dx$.

324. Για την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για κάθε x ισχύει:

$$\int_x^{x+\alpha} f\left(t\right)dt=b$$

όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική.

8 Απαντήσεις

1
1. e^{x+1}
2. $\frac{1}{2}e^{2x}$
3. $2e^x$
4. $\frac{1}{2}e^{2x+1}$

2
1. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$
2. $\ln|x| + e^x$
3. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}^5 + \frac{2}{3}\sqrt{x}^3$
4. $-\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

3 $F + G,\ \ F \cdot G,\ \ \frac{F}{G},\ \ F^3 + G^4$

4 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

5 $G(x) = \frac{x}{e^x} + (x+1)^2 + c$ όπου $c = -\frac{5}{2}\ln 2 - \ln^2 2$.

6 Όχι.

7 (6), (11)

9 $16N$

10 e^2

11 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

14 $f(x) = 2x$

17 $f(x) = ax$

18
1. $\frac{1}{2}x^2 + x + c$
2. $\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + 2\ln x + c$
3. $\ln x - \frac{1}{x} + c$
4. $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{5x^5} + c$

19
1. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 + c$
2. $-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + c$
3. $-\frac{1}{2e^{x^2}} + c$
4. $e^{x-1} + c$

20
1. $\frac{13}{31}\sqrt[13]{x}^{31} + c$
2. $x - \ln|x+1| + c$
3. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$
4. $x - \ln|x+2| + c$

21
1. $\frac{1}{3}x^3 + yx + c$
2. $x^2y + \frac{1}{2}y^2 + c$
3. $\ln|x+1| - \sigma\upsilon\nu x + c$
4. $\frac{2}{9}\sqrt{3x+2}^3 + c$

22
1. $\frac{2}{5}\sqrt{x}^5 + c$
2. $x + \alpha|\ln(x+\beta)| - \beta|\ln(x+\beta)| + c$
3. $x + 2y\ln|y-x| + c$
4. $-y - 2x\ln|x-y| + c$

23

1. $\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + c$
2. $2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} + c$
3. $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4. $-\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\pi x + \frac{1}{3}\pi\right)}{\pi} + c$

24

1. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
2. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 + \frac{2}{3}\sqrt{1-x}^3 + c$
3. $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c$
4. $\frac{1}{3}x^3 + y^2 x + c$

25

1. $-2e^{x+2} + e^{x+2}x + c$
2. $-2e^{x+1} + e^{x+1}(x+1) + c$
3. $5e^{x+1} - 4e^{x+1}(x+1) + e^{x+1}(x+1)^2 + c$
4. $\frac{1}{2}x|x| + c$

26

1. $\frac{1}{2}e^x\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}e^x\eta\mu x + c$
2. $e^{x-2} - \frac{1}{x} + c$
3. $\frac{1}{2}\eta\mu^2 t + c$
4. $\frac{e^x}{e+1} + c$

27

1. $\frac{x}{\ln 3}3^x - \frac{1}{\ln^2 3}3^x + c$
2. $\frac{1}{\ln\frac{p}{p+q}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^t + c$
3. $\frac{1}{1-t}p\left(\frac{p}{p+q}\right)^t + \frac{1}{1-t}q\left(\frac{p}{p+q}\right)^t + c$
4. $\ln|x-2| - \ln|x-1| + c$

28

1. $3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + c$
2. $18x + 3x^2 - 5\ln|x-1| + 48\ln|x-2| + c$
3. $-2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + c$
4. $e^x + \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$

29

1. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{5}\sqrt{x}^5 + \frac{2}{9}\sqrt{x}^9 + c$
2. $\frac{1}{13}\varepsilon\varphi 13x + c$
3. $\frac{5}{2}x^2 + 8x + 9\ln|x-1| + c$
4. $5x - 9\ln|x-1| + 27\ln|x-2| + c$

30

1. $\frac{1}{9}e^{3x-1}(3x-1) + c$
2. $\frac{1}{4}x^4 + e^3 x - \sigma\upsilon\nu x + c$
3. $\frac{1}{2}\eta\mu x - \frac{1}{10}\eta\mu 5x + c$
4. $-\frac{1}{3}\eta\mu 3x + c$

31

1. $-\frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu 5x + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + c$
2. $2\ln|e^x - 1| - x + c$
3. $\frac{1}{\ln 2}2^x + \frac{1}{\ln 3}3^x + c$
4. $\frac{5}{32}\sqrt[5]{1+4x}^8 + c$

32

1. $\frac{1}{4}e^{x^4} + c$
2. $x^3e^x - 3x^2e^x + 6e^x x - 6e^x + c$
3. $\frac{3}{2}x - 2\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x + c$
4. $\frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{1}{3}(x-3)^3 + c$

33

1. $-\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + c$
2. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{37}{3}x^3 - 30x^2 + 36x + c$
3. $\frac{1}{\alpha+\beta}e^{\alpha x + \beta x} + c$
4. $\frac{1}{\ln 2 + 2\ln 3 + 3\ln 5}2^x 3^{2x} 5^{3x} + c$

34

1. $\frac{1}{78}\ln\left(13u^6 + 18\right) + c$
2. $\frac{1}{4}x^2\ln x - \frac{1}{8}x^2 + c$
3. $\frac{(\alpha x+\beta)^{\gamma+1}}{\alpha(\gamma+1)} + c$
4. $\frac{2}{\ln\frac{4}{7}}\left(\frac{4}{7}\right)^t + c$

35

1. $\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + c & x \geq 0 \end{cases}$
2. $|x| - \ln(1 + |x|) + c$

36

1. $-\frac{1}{\beta-\alpha}\ln|x-\alpha| + \frac{1}{\beta-\alpha}\ln|x-\beta| + c$

2. $e^x + \ln|e^x - 1| + c$
3. $\frac{1}{3}\sqrt{2x-3}^3 + c$
4. $2(x-1)\sqrt{\frac{1}{x-1}} + c$

37 1. $\frac{1}{6}\ln^6 x + c$
2. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-1)^4} + c$
3. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4} + c$
4. $\frac{1}{8}e^{4x^2+5} + c$

38 $\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{1}{30}\ln|x-6| + c$

39 1. $A=-3, B=-1, \Gamma=3, \Delta=-2, E=1$
2. $\frac{1}{x-1} - 3\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + 3\ln|x-2| + c$

40 $\varepsilon\varphi x - x + c$

41 $\frac{\alpha x\gamma+\beta\gamma|\ln(\gamma x+\delta)|-\delta\alpha|\ln(\gamma x+\delta)|}{\gamma^2} + c$

42 $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c$

43 $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x-1}^3 - x + 1$

44 $\frac{1}{3}\ln^3 x + c$

45 $\frac{2}{5}\sqrt{1+x^5} + c$

46 $\ln|1+\eta\mu x| - \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$

47 $\sqrt{x^2-2x+3} + c$

48 $e^{x+\frac{1}{x}} + c$

50 $-\frac{1}{3\alpha(\nu-1)\left(\alpha x^3+\beta\right)^{\nu-1}}$

51 $\alpha = \frac{1}{\ln 2}, \beta = \frac{7}{3}\frac{\ln^2 2-1}{\ln^2 2}$

52 $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

53 $\frac{2}{3(\beta-\alpha)}\left(\sqrt{x-\alpha}^3 - \sqrt{x-\beta}^3\right) + c$

54 1. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + c$
2. $\sqrt{3x^2+2x+1} + c$
3. $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-3x+2}^3 + c$

55 1. $-\frac{2}{3}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^{\frac{3}{2}} + c$
2. $\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} + c$
3. $\ln(x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + c$

56 $-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{1}{x}+c$

57 $-\frac{2}{\eta\mu\sqrt{x}}+c$

58 $I_n = e^{\alpha x\sigma\upsilon\nu n-1}\beta x\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\beta x+n\beta\eta\mu\beta x}{\alpha^2+n^2\beta^2}+\frac{n(n-1)\beta^2}{\alpha^2+n^2\beta^2}I_{n-2}$

61 $\frac{175}{4}$

62 $\int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{11}$, $\int_0^\alpha g(x)\,dx = \frac{17}{11}$.

64 16

65
1. $t = \ln 4$
2. $t = -1+\ln 4$
3. $t = \ln\frac{3}{-1+e}$
4. $t = \frac{3}{-1+e}$

66 $b = 2$

67 $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x+x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

69 Όλοι οι θετικοί αριθμοί

75 $x = 0$

77
1. $f'(x) = e^x$
2. $g'(x) = -\sqrt{x}$
3. $h'(x) = (2x+1)\sqrt{(x^2+x-1)}$
4. $s'(x) = 4e^{4x-2}-e^{x+1}$
5. $w'(x) = a\int_1^x e^{-t^2}\,dt+axe^{-x^2}+b$

78 $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

79 $y = -x+2$ και $y = x-3$

81 $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$

83 $\frac{x^3}{3}+x$

84 $\frac{2}{3}$

87 Ελάχιστο $I\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{2t+1}{t^2+5t+6}\,dt = \ln 2+5\ln 5-8\ln 3$. Μέγιστο $\max(I(-1), I(1)) = \max(-5\ln 3+8\ln 2, 13\ln 2-8\ln 3) = 13\ln 2-8\ln 3$

88 $f(x) = \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$

90 Είναι $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = x$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

91 (1) $e^3\sqrt{3}$ (2) $6\sqrt{3}$

92 Είναι $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $g'(x) = -4x \ln|x|$ και η g γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1], (0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0), [1, +\infty)$

93

1. $\frac{\eta\mu x}{x}$
2. $\frac{2\eta\mu x^2 - \int_1^{x^2} \frac{\eta\mu t}{t}dt - \eta\mu x + \int_1^{x} \frac{\eta\mu t}{t}dt}{x^2}$

95 (1)$(1, +\infty)$ (2) Είναι κυρτή σε όλο το πεδίο ορισμού της

96

1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
2. Ελάχιστο 0 για $x = 1$.

98 $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

101 $3x^2a^3 - a^3$

102 Για $x = 1$ η $\frac{33}{2}$.

104 $f(x) = e^x + xe^x$

106 1) Τοπικό μέγιστο για $x = 1$, τοπικό ελάχιστο για $x = 2$. 2) Καμπή για $x = \frac{5}{4}$

107 Παραγωγίζοντας θα βρείτε $f'(x) - f(x) = e^x$. Κατόπιν να πολλαπλασιάσετε με e^{-x}. Θα βρείτε τελικά ότι $f(x) = xe^x + e^x$.

109 $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

111 $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\pi x)}{2x} + \frac{\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{2} & , \quad x \neq 0 \\ \pi & , \quad x = 0 \end{cases}$

112 e^{-16}

113 $+\infty$

114 Αν $\alpha = 1$ η f μπορεί να είναι η οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση. Αν $\alpha \neq 1$ θα είναι $f = 0$.

116 $f(x) = e^x$

117 $a = 3$

118 $f(x) = \alpha - x$

119 $\alpha = \frac{2}{3}$

123

1. 4
2. $\ln 3$
3. $\frac{2}{3}$
4. 0

124

1. $18 - 4\sqrt{6}$
2. $-\left(-e^8 - 1 + e^6 + e^2\right)e^{-4}$
3. $4 + \ln 3$
4. -1

125

1. $\frac{2}{3}\sqrt{\beta}^3 - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}^3$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{\lambda^2 - \lambda^2 \ln\lambda - \ln\lambda - 1}{\lambda}$
4. $\frac{1}{3}p^6 - \frac{1}{3}p^3$

126
1. $-\ln 2 - \ln 3$
2. $-\frac{26}{3}$
3. $\ln 7 - \ln 2 - \ln 5 - 3$
4. 1

127
1. $t + \frac{1}{3}t^3 - s - \frac{1}{3}s^3$
2. 0
3. $\frac{1}{4}$
4. $1 + \ln 2 - \ln(e+1)$

128
1. 1
2. $\frac{5}{2}$
3. $x^4 - 2x^2 + x$
4. 2

129
1. $\frac{13}{2}$
2. $\frac{17}{2}$
3. $\frac{17}{2}$
4. $\frac{13}{2}$

130
1. $\frac{65}{81(\ln 2 - \ln 3)}$
2. $\frac{3}{2}s^6 \ln s - \frac{1}{4}s^6 - \frac{1}{2}s^2 \ln s + \frac{1}{4}s^2$
3. $-\frac{4}{3}$
4. $-\frac{22}{3} + 2\kappa$

131
1. $1 - \frac{2}{e}$
2. $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$
3. $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}$
4. $\frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$

132
1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{7}{2} + \ln 2$
3. $\ln 2$
4. $1 - \sigma\upsilon\nu 1$

133
1. $\frac{\pi}{2}$
2. -9
3. $\frac{1}{3}mn^3 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{3}m^4 - \frac{1}{2}nm^2$
4. $\frac{x^4-1}{2x^2}$

134 $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$

135 $\frac{98}{3}$

136 $\ln 2 - \frac{31}{6}$

137

138 $\lambda = \frac{\pi}{3}$

139 $\alpha = 7,\ \beta = -6,\ \gamma = 3$

140 $x = 1,\ x = 2$

141 1993

143 5

144 $\frac{1}{3}$

145 6

146 $9 - \ln 11 + \ln 2$

147 12

149 $1+\sum_{k=2}^{\nu}\frac{k-1}{\ln k}$

150 1) $1-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}$ γ) $6-e^{-\alpha}\alpha^3-3\alpha^2e^{-\alpha}-6\alpha e^{-\alpha}-6e^{-\alpha}$

152 $\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{6}\pi\ln 3-\frac{1}{3}\pi\ln 2+\frac{1}{12}\pi\ln\pi-\frac{1}{12}\pi$

153 $\frac{1}{2}\ln^2 2$

155 2

156 1

157 x^2

159 $\frac{11}{48}+\frac{5}{64}\pi$

161 2) $\int_0^{\lambda}\frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx=\frac{\lambda}{2}$ γ′) $\frac{1}{2}$

162 $I_1=5$, $I_2=\frac{13}{12}-\frac{1}{2}\ln 2$.

163 2) $I=\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)}-\frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right)+c$
3) $F(1)=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}$

164 $\frac{1}{2}\pi\alpha^2$

165 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}$

167 3) $\frac{\pi^2}{4}$

168 $\ln\frac{25}{24}$

169 $\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$

170 Να γράψετε $1=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$. Θα βρείτε $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

172 $\frac{486}{5}$

173
1. $\alpha=1,\beta=-1,\gamma=0$
2. $\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$

174 (1) $6-\ln 2$ (2) ii. $6-\ln 2$

177 Με την αντικατάσταση $u=3+x\ln x$ θα βρείτε τελικά την τιμή $\ln\left(3+2e^2\right)-\ln(3+e)$.

182

$$I_\nu=e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu x+\nu\eta\mu x}{\alpha^2+\nu^2}+\frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2+\nu^2}I_{\nu-2}$$

$$I_4=e^{\alpha x}\frac{\alpha^4\sigma\upsilon\nu^4x+4\alpha^2\sigma\upsilon\nu^4x+12\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2x+4\alpha^3\eta\mu\sigma\upsilon\nu^3x+16\alpha\sin x\sigma\upsilon\nu^3x+24\alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+24}{\alpha\left(\alpha^4+20\alpha^2+64\right)}$$

183 $I_5=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$

185 1) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$ 3) $-\frac{1}{9}$

186 $\frac{\pi}{4}$

188 $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{2}$

189 3) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

190 $\alpha = 1$

192 (2 Είναι $f'(x) = \frac{2\pi(\eta\mu x)}{x^2-\pi^2}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

197 0

199 $\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$

202 (1 $\lambda = 0$ (2 $\frac{1}{2}\ln 2$

205 (6 $\frac{2x\nu+x-f(x)\nu}{2(\nu+1)} f(x)$

206 $\frac{1}{2}$

209 $S = \frac{1}{12}$

210 $S = \frac{13-5\sqrt{5}}{12}$

211 $S = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

212 $E = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx = 3 - e$

213 $E = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - (2x-1)\right) dx = \frac{2}{3}$

214 Μέγιστο $f(2) = 2$. Ελάχιστο $f(0) = f(1) = 0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^2 (2 - f(x))\,dx = \frac{10}{3}$.

215 $\frac{2}{3}$

216 $\alpha = \sqrt[3]{6}$

217 $\alpha = \sqrt{3}$

218 $\frac{9}{4}$

219 $\frac{73}{6}$

220 10

221 (1 Για $x \to \pm\infty$ η $y = 3x$ για $x \to 0$ η $x = 0$ (2 $E(\alpha) = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$ (3 $\frac{1}{2}$

222 $\frac{\nu-1}{\nu+1}$

223 $4e - 6e^{-1}$

225 $\frac{1}{2}$

227 $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$

228 $p = ln\frac{1+e}{2}$

229 $\lambda = 1$

231 1

232 (3 (α′) Α $(2,2)$, Β $(3,3)$ (β′) $\frac{1}{3}$

233
1. $y = -\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$
2. $E = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$

234 $\lambda = \pm\sqrt[3]{36}$

235 (1 $t(x) = 2x^2 - 4x$, (2 $E = \int_0^2 |t(x)|\, dx = \frac{8}{3}$

236 $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{2} + 1$

237 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\pi$

240 Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = cx^3,\ c > 0,\ x \geq 0$

244 $\sqrt{2},\ \frac{13}{27}\sqrt{13} - \frac{8}{27},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$

245
1. $f(x) + c$
2. $f(x)$
3. $f(x)$
4. 0
5. $f(\beta) - f(\alpha)$
6. $f(x) - f(\alpha)$

247 $\frac{1}{3} + \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{3}\ln^3 x + c$

250 $\alpha = 1, 2, 3$

251 $+\infty,\ +\infty$

252 0

253 $f(x) = e^2 x^2$

254 (3 0

255 (1 $\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ (2 $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \sqrt{2} + 1$

256
1. Κοίλη για $x \leq 1$, κυρτή για $x \geq 1$
2. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = x$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{27}{4}$

259 (2 i.: $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$

260 3)

261 $\frac{1}{3}$

263 $\frac{1}{2}\frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}$

264 $x = 1$ και για $x \to +\infty$ η $y = x - 4$

265
1. $f(x) = \ln(x + 1)$
2. $F(x) = x\ln(x + 1) + \ln(x + 1) - x$

3. $A(0,0), B(e-1,1)$

266 $-\frac{1}{3}$

267 $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$, $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

268 $+\infty$

270 2) $1 - \frac{1}{e^3} + 2\ln 2$

272

1. Συνεχής σε κάθε $x_0 \neq -1$
2. (α′) Είναι $-2 \leq f(x) \leq 2$ για όλα τα x.

   (β′) Βρίσκουμε ότι

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt = \begin{cases} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & x < -2 \\ 2x^2 + x + \frac{2}{3} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3 + 2\ln(x+1) & 0 < x < 1 \\ 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & x \geq 1 \end{cases}$$

   Η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{12}} - 1}$

273 (2, (4, (5

275 (2 $y = 2x + 5$

277 $f(x) = -x + \alpha$

279

1. $f(x) = \ln(x+1)$
2. $\int_0^x f(t)\,dt = \ln(x+1)x + \ln(x+1) - x$

281

1. Γνησίως φθίνουσα
2. 4

285 (4 $\frac{25}{12}$

287

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
2. $\ln\left(e^x + e^{-x}\right) + c$

290 Είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επομένως το όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{-x^2}}{1} = \frac{1}{e}$

292 1) $f(x) = e^{1-x^2}$ 3) $F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{1-x^2}}{x}$, $x > 1$

293 Να εργασθείτε με τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x tf^3(t)\,dt - \left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2$, $x \geq 0$

295 2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

297 2) $I(\alpha) = 7 - \left(2\alpha^2 - 7\alpha + 7\right)e^{\alpha}$ 3) 7

299

1.

300

1. $g'(x) = 3x^2|z|f\left(x^3\right) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$

301 4) $+\infty$

302 2) 8

303 1) $t = -\frac{2}{3}$

305 2) 0

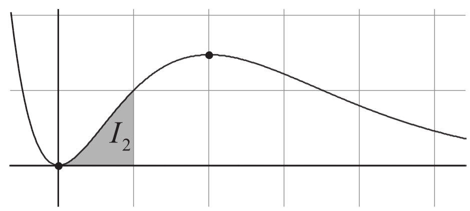
306 2) Η h έχει μέγιστο το $h\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}\right) = 2^{10}\frac{\alpha-4}{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-4}}}$ 3) $x_2 = 2x_1$ 4) 2004

308 1) ii. 1 2) (b) $2 = 3J - 2I$, $\frac{4}{3}$

309 1) α $+\infty$, 0 1 1) b $f'(x) = -xe^{1-x}(x-2)$

1) γ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0



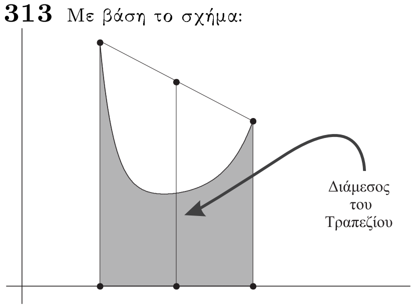
2) α $I_{\nu+1} = (\nu+1)I_\nu - 1$ 2)β $e-2$, $2e-5$

3) β 0

310 $\frac{\pi\ln 2}{8}$

311 $f(x) = 2007x$

313 Με βάση το σχήμα:



κ.τ.λ.

314 Το πεδίο ορισμού απαρτίζεται από τα $x > 4$ και τα $0 < x < 1$

317 1. $\frac{49}{8}\left(1-k^2\right)$ για $x = \frac{49}{4}k\sqrt{1-k^2}$

2. Για δοθέν k το εμβαδόν είναι

$$E(k) = \int_0^{\frac{49}{2}\sqrt{(1-k^2)k}} f_k(x)\,dx = \frac{2401}{24}\left(1-k^2\right)\sqrt{(1-k^2)k}$$

Είναι $E'(k) = \frac{2401}{24}\sqrt{1-k^2}\,(1-2k)(2k+1)$ και επομένως το $E(k)$ γίνεται μέγιστο για $k = \frac{1}{2}$. Επομένως μέγιστο εμβαδό με τον $x'x$ σχηματίζει η $f_{\frac{1}{2}}(x)$.

319 4) 0

322 0

323 13