ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

ΤΑΞΗ Γ΄
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Σημειώσεις Θεωρίας

74 Ερωτήσεις Θεωρίας+24 Χρήσιμες Προτάσεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σχολικό Έτος 2011-2012

Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τάξη Γ, Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Σημειώσεις Θεωρίας

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

10 Απριλίου 2012
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

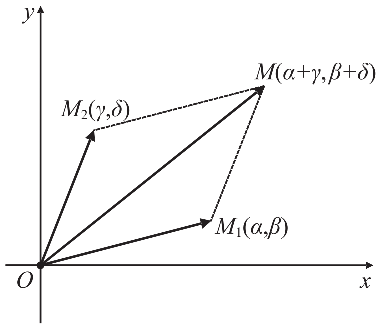
Μέρος I
Ερωτήσεις Θεωρίας

Ερωτηση 1. Πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι;

Απαντηση Ισχύει $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$
1πτ

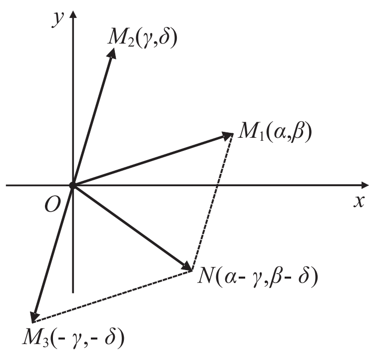
Ερωτηση 2. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Απαντηση Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.



Ερωτηση 3. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Απαντηση Η διαφορά $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$. Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$.



Ερωτηση 4. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Απαντηση Έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)==\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

Ερωτηση 5. Τι ονομάζεται συζυγής του $\alpha+\beta i$;

Απαντηση Ο αριθμός $\alpha - \beta i$ που συμβολίζεται με $\overline{\alpha + \beta i}$.

Ερωτηση 6. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$, στη μορφή $\kappa + \lambda i$.

Απαντηση Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δηλαδή

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Ερωτηση 7. Ποιες είναι οι δυνατές δυνάμεις του i ;

Απαντηση Έχουμε:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i$$

και γενικά αν $\nu = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, τότε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 0 \\ i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 1 \\ -1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 2 \\ -i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

Ερωτηση 8. Να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Απαντηση $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Ερωτηση 9. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta < 0$

Απαντηση Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\frac{\iota\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$. Άρα οι λύσεις της είναι: $z1, 2 = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Ερωτηση 10. Τι ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού $z = x + yi$;

Απαντηση Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή τον αριθμό $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ερωτηση 11. Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Απαντηση Έχουμε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$

Ερωτηση 12. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και τι τιμή της f στο $x \in A$;

Απαντηση Μια διαδικασία (κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Ερωτηση 13. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μίας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;

Απαντηση Το σύνολο $f(A) = \{y | y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$ που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$.

Ερωτηση 14. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;

Απαντηση Το σύνολο C_f των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$.

Ερωτηση 15. Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;

Απαντηση Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ερωτηση 16. Αν f, g, είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, fg και $\frac{f}{g}$.

Απαντηση Ορίζουμε το άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ των f, g τις συναρτήσεις με τύπους αντιστοίχως τους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ , \ (f - g)(x) = f(x) - g(x) \ , \ (fg)(x) = f(x)g(x) \ ,$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x|x \in A \text{ και } x \in B \text{ , με } g(x) \neq 0\}$$

Ερωτηση 17. Αν f, g, είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$ της f με την g.

Απαντηση Είναι η συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A|f(x) \in B\}$$

Ερωτηση 18. Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, αύξουσα, φθίνουσα στο Δ;

Απαντηση Η f λέγεται

- γνησίως αύξουσα στο Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- γνησίως φθίνουσα στο Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$
- αύξουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- φθίνουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ερωτηση 19. Πότε η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Ερωτηση 20. Τι είναι τα ολικά ακρότατα μίας συνάρτησης f;

Απαντηση Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της f (εφόσον υπάρχουν) λέγονται (ολικά) ακρότατα της f.

Ερωτηση 21. Πότε μία συνάρτηση λέγεται 1-1;

Απαντηση Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1 - 1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 22. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι συνάρτηση $1-1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x_1 + \beta = \alpha x_2 + \beta \Rightarrow \alpha x_1 = \alpha x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 23. Πως ορίζεται η αντίστροφη μίας 1-1 συνάρτησης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω μια $1-1$ συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ και επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

ΕΡΩΤΗΣΗ 24. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

και κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 25. Να αποδείξετε ότι για κάθε ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ και κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 26. Πότε μία συνάρτηση f θα είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Όταν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ερωτηση 27. Πότε μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση Όταν:
α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Ερωτηση 28. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);

Απαντηση Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β)

Ερωτηση 29. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Απαντηση

- Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον
- $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

Ερωτηση 30. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απαντηση Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$
Δηλαδή: Υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Ερωτηση 31. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Απαντηση *Διατύπωση:* Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

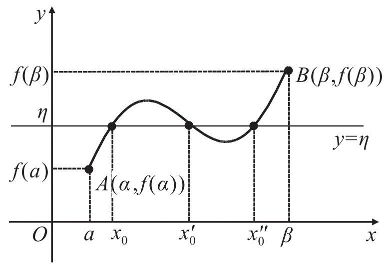
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.



Ερωτηση 32. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απαντηση Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή μ. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Ερωτηση 33. Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς, όχι σταθερής, συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$;

Απαντηση Το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Ερωτηση 34. Ποιο είναι το σύνολο τιμών μίας γνησίως αύξουσας (αντιστοίχως φθίνουσας) και συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;

Απαντηση Το διάστημα (Α, Β) (αντιστοίχως (B, A)) όπου $\mathrm{A} = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$.

Ερωτηση 35. Πως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α;

Απαντηση Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία

$$\varepsilon\colon\ y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$$

που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Ερωτηση 36. Πότε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο $x_\mathbf{0}$ και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Ερωτηση 37. Τι ονομάζεται κλίση της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ ή κλίση της f στο x_0 ;

Απαντηση Η κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$.

Ερωτηση 38. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ′ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απαντηση Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Ερωτηση 39. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ αν και συνεχής στο $x_0 = 0$, δεν είναι παραγωγίσιμη σ′ αυτό.

Απαντηση Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ′ αυτό, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$.

Ερωτηση 40. Πότε λέμε για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι:

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A;
2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;
3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
2. Η f είναι παραγωγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$.

Ερωτηση 41. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A;

Απαντηση Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}, \qquad x \ \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

Ερωτηση 42. Να αποδείξετε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$.

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Ερωτηση 43. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$.

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Ερωτηση 44. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \cdots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Ερωτηση 45. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ακόμη να αποδείξετε ότι αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Τέλος $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και επομένως η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται στο 0.

Ερωτηση 46. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Απαντηση Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x$. Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

Ερωτηση 47. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$.

Απαντηση Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}$$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x$. Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

Ερωτηση 48. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απαντηση Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} == \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Ερωτηση 49. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$.

Απαντηση Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$

Ερωτηση 50. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,|\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απαντηση Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Ερωτηση 51. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Απαντηση Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ερωτηση 52. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

Απαντηση Αν$y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$

Ερωτηση 53. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|\,)' = \frac{1}{x}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Πράγματι. η αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|\,)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ η αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$
και άρα $(\ln|x|\,)' = \frac{1}{x}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 54. Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $f'(x_0)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 55. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

ΕΡΩΤΗΣΗ 56. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 57. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απαντηση Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Ερωτηση 58. Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Απαντηση Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

Ερωτηση 59. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απαντηση Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.
Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

ΕΡΩΤΗΣΗ 60. Πως ορίζεται η θέση τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου μίας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (αντιστοίχως: τοπικό ελάχιστο), όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ (αντιστοίχως $f(x) \geq f(x_0)$) για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο (αντιστοίχως τοπικό ελάχιστο), της f .

ΕΡΩΤΗΣΗ 61. Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και } f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 62. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

2. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απαντηση

1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \ \text{ για κάθε } \ x \in (\alpha, x_0] \ \ (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) \ \text{ για κάθε } \ x \in [x_0, \beta) \ \ (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \ \text{ για κάθε } \ x \in (\alpha, \beta)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

2. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

   - Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
   - Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
   - Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

   Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
   Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Ερωτηση 63. Πότε μία συνάρτηση f θα λέγεται κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ ;

Απαντηση Αν είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως: γνησίως φθίνουσα) στο εσωτερικό του Δ.

Ερωτηση 64. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Απαντηση Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f αν ισχύει:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Ερωτηση 65. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

Απαντηση Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Ερωτηση 66. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απαντηση Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$))

Ερωτηση 67. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απαντηση Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$, (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$)

Ερωτηση 68. Αν ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ ποιες σχέσεις μας δίνουν τα λ, β;

Απαντηση

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta$ αντιστοίχως

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta$

Ερωτηση 69. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.

Απαντηση

$\boxed{\text{Μορφή } \frac{0}{0}}$ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\boxed{\text{Μορφή } \frac{\pm\infty}{+\infty}}$ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ερωτηση 70. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται παράγουσα της f στο Δ ;

Απαντηση Ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Ερωτηση 71. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Απαντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Ερωτηση 72. Τι ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ;

Απαντηση Ονομάζεται το σύνολο όλων των παραγουσών της συνάρτησης f στο διάστημα Δ και συμβολίζεται $\int f(x)dx$.

Ερωτηση 73. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απαντηση Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \;\; (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$$

οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα

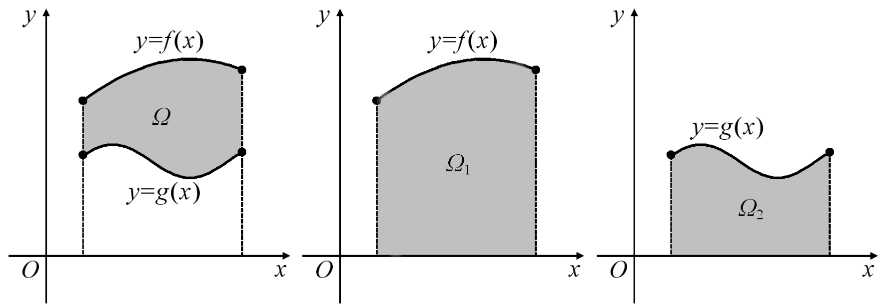
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ερώτηση 74. Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του Ω ισχύει $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Απαντηση Παρατηρούμε ότι

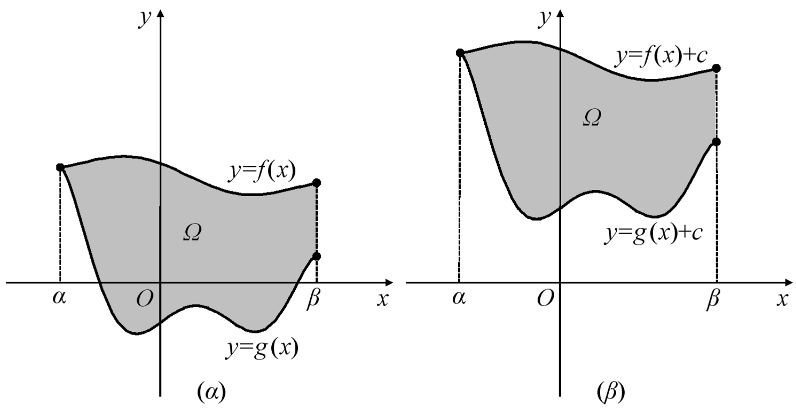
$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$$

Επομένως: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$



Ερώτηση 75. Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του Ω ισχύει $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Απαντηση Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. β). Επομένως, έχουμε: $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$. Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta ((x)-g(x))dx$.



Μέρος II
Χρήσιμες Προτάσεις

Σημειωση
Αν καποια προταση απο τις επομενες χρησιμοποιηθει χρειαζεται αποδειξη. Εξαιρεση αποτελουν οι (3),(13), (21)

Προταση 1. Ένας μιγαδικός είναι πραγματικός αν και μόνο αν είναι ίσος με τον συζυγή του.

Αποδειξη: Αν $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $z - \bar{z} = 2\beta i$ και επομένως

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

Προταση 2. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Αποδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f. Αφού $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μικρότερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_1 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $f(x_1) < y$. Αφού $\lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $y < f(x_2)$. Προφανώς $x_1 \neq x_2$ και από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει x στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως ο y είναι τιμή της f.

Προταση 3. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\ln x \leq x - 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$.

Αποδειξη: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

Προταση 4. Για κάθε x είναι

$$e^x \geq x + 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

Αποδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει

$$\ln x \leq x - 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x - 1$ και το το «=» ισχύει μόνο για $e^x = 1$ δηλαδή $x = 0$. Επομένως $x \leq e^x - 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $e^x \geq x + 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

Προταση 5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και ισχύει $|g(x)| < m$ για όλα τα $x \in \Delta$ και $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x)\, g(x) = 0$.

Αποδειξη: Είναι:

$$|f(x)\, g(x)| = |f(x)|\, |g(x)| \le |f(x)|\, m$$

Άρα για όλα τα x ισχύει

$$|f(x)\, g(x)| \le |f(x)|\, m$$

και επομένως

$$-|f(x)|\, m \le f(x)\, g(x) \le |f(x)|\, m$$

Αλλά αφού $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$ είναι και $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = 0$ επομένως

$$\lim_{x \to \sigma} m\, |f(x)| = \lim_{x \to \sigma} (-m\, |f(x)|) = 0 \qquad (1)$$

Από την (1) και το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι

$$\lim_{x \to \sigma} f(x)\, g(x) = 0$$

Προταση 6. Η συνάρτηση $|x|$ έχει για $x \neq 0$ παράγωγο $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ ενώ στο 0 δεν παραγωγίζεται.

Αποδειξη: Το ότι δεν παραγωγίζεται στο 0 είναι γνωστό. Επίσης για $x > 0$ είναι $(|x|)' = (x)' = 1 = \frac{x}{x} = \frac{|x|}{x}$. Ακόμη για $x < 0$ είναι $(|x|)' = (-x)' = -1 = \frac{x}{-x} = \frac{x}{|x|}$. Άρα για $x \neq 0$ είναι $(|x|)' = \frac{x}{|x|}$ και προφανώς ισχύει $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ διότι $x^2 = |x|^2$.

Προταση 7. Αν $f : [\alpha, \beta] \to R$ συνεχής και $f(\alpha)\, f(\beta) \le 0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

Αποδειξη: Αφού ισχύει $f(\alpha)\, f(\beta) \le 0$ ή θα είναι $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$ είτε $f(\alpha)\, f(\beta) = 0$.

- Αν $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$ τότε από το θεώρημα του Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και επομένως στο $[\alpha, \beta]$.
- Αν $f(\alpha)\, f(\beta) = 0$ τότε ή $f(\alpha) = 0$ είτε $f(\beta) = 0$. Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\{\alpha, \beta\}$ και επομένως στο $[\alpha, \beta]$ Σε κάθε περίπτωση η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

Προταση 8. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της αντίστροφής της f^{-1}, εφ' όσον υπάρχουν, ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Αποδειξη: Έστω $M(\alpha, \beta)$ ένα σημείο που ανήκει και στην $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Θα ισχύει $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Θα δείξουμε ότι το M ανήκει και στην $y = x$ δηλαδή ότι $\alpha = \beta$.

Αν είναι $\alpha \neq \beta$ τότε ή θα είναι $\alpha < \beta$ είτε $\beta < \alpha$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $f(\alpha) < f(\beta)$ δηλαδή $\beta < \alpha$ (άτοπο). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $f(\beta) < f(\alpha)$ δηλαδή $\alpha < \beta$ (άτοπο). Άρα αποκλείεται να είναι $\alpha \neq \beta$ και απομένει ότι $\alpha = \beta$.

Προταση 9. Έστω $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

1. Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$
2. Αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

Αποδειξη: Είναι
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx =_{u=-x} -\int_{\alpha}^{0} f(-u)\,du + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(-x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$
Όταν η f είναι άρτια τότε τότε $f(-x) = f(x)$ και $\int_0^{\alpha} f(-x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.
Όταν η f είναι περιττή τότε $f(-x) = -f(x)$ και $\int_0^{\alpha} f(-x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

Προταση 10. Η συνάρτηση $x\ln x - x$ είναι μία παράγουσα της $\ln x$.

Αποδειξη: Προφανώς ισχύει $(x\ln x - x)' = (x\ln x)' - (x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)' = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$

Προταση 11. $(\varepsilon\varphi x)' = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$

Αποδειξη: Είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και από γνωστή σχέση της τριγωνομετρίας είναι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$.

Προταση 12. Με $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z^2$ αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.

Αποδειξη: Έστω $z = \alpha + \beta i$. Είναι $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta i)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$ και $2\alpha\beta = 0) \Leftrightarrow (2\beta^2 = 0$ και $\alpha\beta = 0) \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Προταση 13. Έστω ότι ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο σ. Ισχύουν τα επόμενα:

- $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$

Αιτιολογηση: Πρόκειται για άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου. Ισχύει κατ΄ αναλογία με τις ιδιότητες των πεπερασμένων ορίων [1]

Προταση 14. Αν για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \ge g(x)$ για όλα τα x και $f \ne g$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

Αποδειξη: Για την συνάρτηση $h = f - g$ ισχύει $h(x) \ge 0$ για όλα τα x και $h \ne 0$. Επομένως $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx > 0$ από την οποία έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\,dx > 0$ άρα και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

[1] Βλ. σχολικό βιβλίο αρχή της σελίδας 184

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ τότε μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ριζών της f βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της f'.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της f στο Δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle άρα θα υπάρχει ξ με $\rho_1 < \xi < \rho_2$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_1) < f(x_2)$ τότε είναι $x_1 < x_2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τους x_1, x_2 υπάρχουν τα ενδεχόμενα: $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$ και $x_1 < x_2$. Το πρώτο μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) = f(x_2)$. Το δεύτερο, σε συνδυασμό με το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα μας οδηγεί στο επίσης άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα αναγκαστικά θα ισχύει $x_1 < x_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 17. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω f μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και σε κάθε περίπτωση είναι 1-1. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της f τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και από την σχέση $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ συνάγουμε ότι $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως η f έχει το πολύ μία ρίζα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 18. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ έτοια ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$ θα είναι δε $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$. Ξέρουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ και θέλουμε $x_1 < x_2$. Η απόδειξη συμπληρώνεται επιχειρηματολογώντας όπως ακριβώς στην πρόταση (16.).

ΠΡΟΤΑΣΗ 19. Αν $|z| = \rho \neq 0$ τότε $\bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού $|z| \neq 0$ είναι και $z \neq 0$. Έχουμε τώρα: $|z| = \rho \Rightarrow |z|^2 = \rho^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 20. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ τότε

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^2 + z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow_{z \notin \mathbb{R}} z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow_{(\text{ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ})} z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 21. Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f' = f$ είναι ακριβώς εκείνες της μορφής $f(x) = ce^x$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

Προταση 22. Αν $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$.

Αποδειξη: Από την ανισότητα $-|A| \leq A \leq |A|$ έχουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Είναι $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = \lim\limits_{x \to \sigma} (-|f(x)|) = 0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$.

Προταση 23. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του $\in \Delta$ τότε η f είναι αύξουσα στο Δ

Αποδειξη: Είναι όμοια με την ανάλογη απόδειξη του σχολικού βιβλίου για την περίπτωση όπου η παράγωγος είναι θετική. Το μόνο που αλλάζει είναι η τελευταία γραμμή:
«Επειδή $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ οπότε $f(x_1) \leq f(x_2)$»

Προταση 24. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ δεν έχει ακρότατα.

Αποδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (η περίπτωση όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα αντιμετωπίζεται αναλόγως). Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$. Για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχει ένα τουλάχιστον $x_1 < x_0$ και ένα τουλάχιστον $x_2 > x_0$. Λόγω της μονοτονίας θα είναι $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ είτε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$. Άρα κανένα x_0 δε μπορεί να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.