3^0 ΛΥΚΕΙΟ Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ	ΕΠΩΝΥΜΟ
ΤΑΞΗ Γ΄ (*Θετική Κατεύθυνση*) ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5	ΟΝΟΜΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 13 Δεκ. 2000	ΒΑΘΜΟΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$;

Β) Για την συνάρτηση f του ερωτήματος **Α)** να εξετάσετε αν ισχύει το επόμενο:
Για κάθε $x\in D_f$ υπάρχει $x'\in D_f$ τέτοιο ώστε $f(x)<f(x')$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο [0, 1] και πληρούν τις σχέσεις f(0)<g(0) και f(1)>g(1), να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(0, 1) τέτοιο ώστε f(ξ)=g(ξ).

Β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ημx$ και $g(x)=e^{-x}$ ορισμένες στο [0, 1]. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Καλή επιτυχία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΖΗΤΗΜΑ 1

Α) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 145, Α1, ii)

Β) Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και επειδή ορίζεται στο κλειστό διάστημα D_f =[1, 2] θα έχει μέγιστη τιμή. ΄Αρα θα υπάρχει $x_μ\in[1,2]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x)\le f(x_μ)$ για κάθε $x\in[1,2]$ και για το $x=x_μ$ δεν υπάρχει $x'\in[1,2]$ έτσι ώστε $f(x)<f(x')$. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 199, Β4

Β) Οι συναρτήσεις f, g είναι προφανώς συνεχείς.

Είναι $f(0)=ημ0=0<1=e^{-0}=g(0)$ και $g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}=ημ\frac{π}{4}<ημ1=f(1)$.

Επομένως από το Α) υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(0, 1) τέτοιο ώστε f(ξ)=g(ξ). Αρα οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο το Α(ξ, f(ξ)).

Αν $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2$ άρα $e^{-x_1}>e^{-x_2}$ άρα $g(x_1)<g(x_2)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης επειδή η ημ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{π}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα και στο [0, 1] δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. ΄Αρα για x<ξ θα είναι f(x)<f(ξ)=g(ξ)<g(x) ενώ για x>ξ θα είναι f(x)>f(ξ)=g(ξ)>g(x) επομένως για x≠ξ είναι f(x)≠g(ξ). Δηλαδή το σημείο Α είναι το μοναδικό κοινό σημείο.