Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικό Έτος 2000-2001
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
2. Να βρείτε σημείο της C_f που να απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

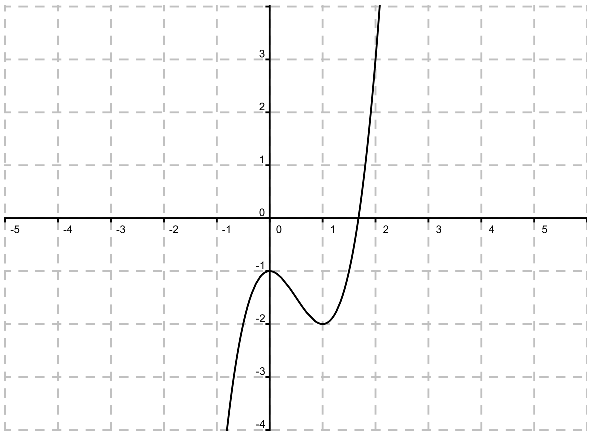
1. Σχολικό βιβλίο Α2 iii) σελ. 267
2. Από την μελέτη της μονοτονίας της f έχουμε βρεί ότι στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Έχουμε:

$$f((-\infty, 0]) = (\lim_{x \to -\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, -1]$$

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [-2, -1]$$

$$f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)) = [-2, \infty)$$

   Βλέπουμε ότι μόνο το τρίτο διάστημα περιέχει το μηδέν άρα η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Η ρίζα αυτή λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική. Τελικά η συνάρτηση έχει μία μόνο ρίζα.



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α3 i) σελ. 277

2. Το τυχόν σημείο της $\mathcal{C}_f$ είναι της μορφής $M(x, f(x))$ και η απόσταση του από το σημείο $O(0,0)$ είναι

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (f(x)-0)^2} = \sqrt{x^2 + e^{-2x^2}}$$

Έχουμε $d'(x) = \frac{x\left(1-2e^{-2x^2}\right)}{\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}}$. Είναι

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x\left(1-2e^{-2x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2} < x < 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2} < x$$

Επομένως η μονοτονία της συνάρτησης d είναι η ακόλουθη: $(-\infty, -\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}]$ ↥, $\left[-\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, 0\right]$ ↧, $[0, \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}]$ ↥, $[\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, +\infty)$ ↧. Άρα παρουσιάζει μέγιστο το οποίο είναι η μέγιστη από τις τιμές της d στα $\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}$. Αλλά η d είναι, προφανώς, άρτια επομένως οι δύο αυτές τιμές είναι ίσες. Συνεπώς η μέγιστη απόσταση παρουσιάζεται στα σημεία $\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, f\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\right)\right)$ δηλαδή στα σημεία $\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.