Τάξη Γ΄
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς
Σχολικό Έτος 2001-2002
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η εξίσωση

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad (1)$$

1. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την (1).
2. Να αποδείξετε ότι αν z είναι μία οποιαδήποτε λύση της (1) τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών

   $$z, \quad \frac{1}{\overline{z}}, \quad -z$$

   είναι σημεία συνευθειακά.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ να αποδείξετε ότι

   $$z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = 2\sigma\upsilon\nu\left(\nu\theta\right) \quad (2)$$

2. Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει η (2). Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\left(z^\nu \overline{z}^\nu - 1\right)\left(z^\nu - \overline{z}^\nu\right) = 0$.

   (β΄) Αν $z^\nu \notin \mathbb{R}$ τότε ισχύει $|z| = 1$.

   (γ΄) Αν $z^\nu \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $|z| = 1$.

   (δ΄) Υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ ώστε $z = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Α13 α) σελ. 96
ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο Β6 α) σελ. 112