| | | |
|---|---|---|
| 3ο ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ | Τάξη Γ′ | Θετική Κατεύθυνση |
| ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5 | 13 Δεκ. 2001 | *Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης* |
| ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ | ΒΑΘΜΟΣ: | |

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}$$

1. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_g$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 = \mu$$

(β′) Να αποδείξετε ότι αν $\mu \neq 0$ τότε $g\left(2\sqrt{|\mu|}\right) = g\left(\frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}}\right)$.

(γ′) Να αποδείξετε ότι η τιμή που βρήκατε στο ερώτημα (1) είναι η μοναδική τιμή του $\mu$ για την οποία η $g$ είναι 1-1.

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την $f$.

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = f(\xi - f(\xi))$$

*Καλή Επιτυχία*

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΖΗΤΗΜΑ 1, (1)

Σχολικό βιβλίο, σελίδα 182, Β3

## ΖΗΤΗΜΑ 1, (2)

**(α′):** $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 + \frac{\mu}{x_1} = x_2 + 2 + \frac{\mu}{x_2} \Leftrightarrow x_1 + \frac{\mu}{x_1} - x_2 - \frac{\mu}{x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\frac{x_1 x_2 - \mu}{x_2 x_1} = 0 \underset{x_1 - x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} x_1 x_2 = \mu$

**(β′):** Με $x_1 = 2\sqrt{|\mu|}, x_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}}$ είναι $x_1 x_2 = 2\sqrt{|\mu|}\frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}} = \mu$ οπότε από το προηγούμενο θα είναι $g(x_1) = g(x_2)$

**(γ′):** *Έστω ότι* $\mu \neq 0$. Τότε οι μη μηδενικοί αριθμοί $x_1 = 2\sqrt{|\mu|}, x_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}}$ είναι διάφοροί διότι: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{|\mu|} = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}} \Leftrightarrow 2\sqrt{|\mu|}2\sqrt{|\mu|} = \mu \Leftrightarrow |\mu| = \frac{1}{4}\mu$ (αδύνατο). Από το (β′) όμως είναι $g(x_1) = g(x_2)$. Επομένως στην περίπτωση αυτή η $f$ δεν είναι 1-1.

*Έστω ότι* $\mu = 0$. Θα δείξουμε ότι αν $g(x_1) = g(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$. Πράγματι αν ήταν $x_1 \neq x_2$ τότε από το (α′) θα ίσχυε $x_1 x_2 - \mu = 0$ δηλαδή $x_1 x_2 - 0 = 0$ δηλαδή $x_1 x_2 = 0$ πράγμα αδύνατο αφού $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}$. Επομένως η $g$ είναι 1-1.

Άρα η μόνη τιμή του $\mu$ για την οποία η $f$ είναι 1-1 είναι η $\mu = 0$.

## ΖΗΤΗΜΑ 2, (1)

Σχολικό βιβλίο, σελίδα 198, Β4, ii)

## ΖΗΤΗΜΑ 2, (2)

Από το (α′) η $f$ είναι συνεχής. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x - f(x))$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ και $f(x - f(x))$. Είναι $h(0) = f(0) - f(0 - f(0)) = \sigma\upsilon\nu 0 - f(-\sigma\upsilon\nu 0) = 1 - f(-1) = 1 - \frac{\eta\mu(-1)}{-1} = 1 - \eta\mu 1 > 0$ (αφού $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$). Και $h(\pi) = f(\pi) - f(\pi - f(\pi)) = \sigma\upsilon\nu\pi - f(\pi - \sigma\upsilon\nu\pi) = -1 - \sigma\upsilon\nu(\pi + 1) < 0$ (αφού $\pi < \pi + 1 < \frac{3\pi}{2}$). Από το θεώρημα του Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi$ μεταξύ των $0, \pi$ ώστε $h(\xi) = 0$ δηλαδή $f(\xi) = f(\xi - f(\xi))$