Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικό Έτος 2002-2003
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2$$

με $\alpha < \beta < \gamma$.

1. Να αποδείξετε ότι η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.
2. Να βρείτε πόσα σημεία καμπής έχει η f

ΖΗΤΗΜΑ 2

'Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$
2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f, \quad f\circ f, \quad f\circ f\circ f, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες τους στο $+\infty$ είναι παράλληλες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β6 σελ. 270
2. Είναι:

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right)$$

Στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\beta,\gamma]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και οι τιμές που παίρνει στα άκρα είναι ίσες με 0. Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle και θα υπάρχουν ρ_1, ρ_2 με

$$\alpha < \rho_1 < \beta < \rho_2 < \gamma$$

ώστε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$. Τα ρ_1, ρ_2 είναι αναγακστικά οι ρίζες του παράγοντα $3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ της $f'(x)$ και επομένως

$$3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

άρα θα είναι

$$f'(x) = 6(x-\alpha)(x-\rho_1)(x-\beta)(x-\rho_2)(x-\gamma)$$

Τώρα η f'', πάλι από το θεώρημα του Rolle θα έχει από μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (α,ρ_1), (ρ_1,β), (β,ρ_2), (ρ_2,γ). Αλλά ή f'' είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού άρα θα έχει το πολύ 4 ρίζες. Επομένως θα έχει ακριβώς 4 ρίζες και θα έχει την μορφή:

$$f''(x) = k(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)(x-t_4)$$

όπου $k \neq 0$ (στην πραγματικότητα $k = 30$ αλλά αυτό δεν έχει σημασία). Η $f''(x)$ έχει ρίζες τα t_1, t_2, t_3, t_4 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της. Επομένως η f έχει 4 σημεία καμπής.

ΖΗΤΗΜΑ 2

'Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+x}$.

1. Σχολικό βιβλίο Α3 iii) σελ. 285

2. Στο πρώτο ερώτημα βρήκαμεότι η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x \to +\infty$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ με πεδίο ορισμού το ίδιο με εκείνο της g. Θα ισχύει:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
- $f(x) = x + \frac{1}{2} + g(x)$

Προφανώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Έχουμε:

$$f(f(x)) = f(x)+\frac{1}{2}+g(f(x)) = x+\frac{1}{2}+g(x)+\frac{1}{2}+g(f(x)) = x+1+g(x)+g(f(x))$$

Αλλά $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) =_{g(x)=u} \lim_{u\to+\infty} g(u) = 0$ επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(f(f(x)) - (x+1)) = \lim_{x\to+\infty}(g(x)+g(f(x))) = 0+0 = 0$$

Άρα η $f \circ f$ έχει ασύμπτωτη την $y = x+1$. Επομένως η $(f\circ f)(x) = x+1+h(x)$ με $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Άρα

$$f(f(f(x))) = (f\circ f)(f(x)) = f(x)+1+h(x) = x+\frac{1}{2}+g(x)+1+h(x) = x+\frac{3}{2}+g(x)+h(x)$$

επομένως αφού $\lim_{x\to+\infty}(g(x)+h(x)) = 0$ η ευθεία $y = x+\frac{3}{2}$ είναι ασύμπτωτη της $f(f(f(x)))$. Άρα (μπορεί να χρησιμοποιηθεί και επαγωγή χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο) τέλικά οι ασύμπτωτες των

$$f,\quad f\circ f,\quad f\circ f\circ f, \ldots$$

είναι οι

$$y = x+\frac{1}{2},\quad y = x+1,\quad y = x+\frac{3}{2},\quad y = x+2, \ldots.$$

που είναι φυσικά παράλληλες.