3ο ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ	Τάξη Γ΄	Θετική Κατεύθυνση
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5	4 Δεκ. 2003	*Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης*
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΟΣ:	

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2x^2 + \beta x - 12 & , \quad x < 1 \\ 5 & , \quad x = 1 \\ \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
2. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ να αποδείξετε η εξίσωση

   $$(f(x))^{2003} = \lambda$$

   έχει λύση για κάθε λ.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $g(x) + 1 > 0$.

   (β΄) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+g(x)} + \eta\mu x\right)$

Καλή Επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 199, Β2
2. Αφού η f είναι συνεχής από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι $\alpha = 4$, $\beta = 1$ ή $\alpha = -3$, $\beta = 8$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha x + \beta) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha x)$ και επομένως αφού θέλουμε το όριο να είναι $-\infty$ θα πρέπει $\alpha = -3$. Θεωρούμε τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $h(x) = (f(x))^{2003} - \lambda$.Αφού η f είναι συνεχής και η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left((f(x))^{2003} - \lambda\right) = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha^2x^2) = +\infty$. Επομένως υπάρχει x_1 ώστε $h(x_1) > 0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left((f(x))^{2003} - \lambda\right) = -\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{2003} = -\infty$. Επομένως υπάρχει x_2 ώστε $h(x_2 < 0$. Θα είναι $x_1 \neq x_2$ και επομένως από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $h(x_0) = 0$. Αυτό το x_0 θα είναι λύση της εξίσωσης $(f(x))^{2003} = \lambda$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 187, Α3, v).

2. (α′) Είναι $g(x)+1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ και για τον παρονομαστή έχουμε $x-\sqrt{x^2-1}>x-\sqrt{x^2}=x-|x| =_{(x>1)} 0$ άρα πρέπει να δείηουμε ότι ο ραριθμητής του κλάσματος είναι θετικός δηλαδή ότι $x-\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2-1}>0$. Έχουμε:
$x-\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow 2x>\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$
$4x^2>\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2>x^2+1+x^2-1+2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow$
$2x^2>2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow x^4>x^4-1$ (ισχύει)

(β′) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+1)=-1+1=0$ αλλά $g(x)+1>0$ για $x>1$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)}=+\infty$. Όμως $\frac{1}{1+g(x)}+\eta\mu x \geq \frac{1}{1+g(x)}-1$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}-1\right)=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}+\eta\mu x\right)$.
ΑΛΛΙΩΣ Δείχνουμε όπως πριν ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)}=+\infty$ και στη συνέχεια γράφουμε

$$\frac{1}{1+g(x)}+\eta\mu x=\frac{1}{1+g(x)}\left(1+\eta\mu x\left(1+g(x)\right)\right)$$

και αφού

$$|\eta\mu x\left(1+g(x)\right)|=|\eta\mu x|\,|(1+g(x))| \leq (1+g(x))$$

συμπεραίνουμε ότι $-(1+g(x)) \leq \eta\mu x\left(1+g(x)\right) \leq 1+g(x)$ άρα από το κριτήριο της παρεμβολής αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+1)=0$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x\left(1+g(x)\right)=0$.
Επομένως θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)}\left(1+\eta\mu x\left(1+g(x)\right)\right)=+\infty$ οπότε και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}+\eta\mu x\right)=+\infty$$