Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικό Έτος 2003-2004
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\frac{x}{e^{x}}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
2. Να βρείτε τα διαστήματα που ή f είναι κοίλη-κυρτή.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^{x}$$
$$g(x)=-x^{2}-x$$

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ ατο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην $\mathcal{C}_g$.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

   $$e^{x}+2x+1=0$$

   έχει μία μοναδική ρίζα ξ στο διάστημα $(-1,0)$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ είναι $\xi^{2}-\xi-1$ όπου ξ είναι ο αριθμός του ερωτήματος α΄).

   (γ΄) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda>1$ τότε η εξίσωση $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Α4 ii) σελ. 256
2. Στο $(-\infty,2]$ είναι κοίλη και$[2,+\infty)$ στο είναι κυρτή.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β4 σελ. 240

   (α΄) Έστω $h\left(x\right)=e^{x}+2x+1$.

- Είναι $h(-1) \cdot h(0) = \left(\frac{1}{e} - 1\right) \cdot 2 < 0$ και αφού η h είναι συνεχής από το θεώρημα του Bolzano η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.
- Είναι $h'(x) = e^x + 2 > 0$ επομένως $h \uparrow$ άρα η h έχει το πολύ μία ρίζα.

Επομένως η h έχει ακριβώς μία ρίζα ξ που ανήκει στο $(-1, 0)$.

(β') Έστω $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Είναι $\varphi'(x) = e^x + 2x + 1$ και $\varphi''(x) = e^x + 2$. Επομένως η $\varphi'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Από το προηγούμενο ερώτημα η φ' έχει μοναδική ρίζα το ξ. Λόγω της μονοτονίας είναι

- Αν $x < \xi$ τότε $\varphi'(x) < 0$.
- Αν $x > \xi$ τότε $\varphi'(x) > 0$.

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$. Άρα απαρουσιάζει ελάχιστο στο ξ που είναι το $\varphi(\xi) = e^{\xi} + \xi^2 + \xi = \left(e^{\xi} + \xi\right) + \xi^2 =_{e^{\xi}+2\xi+1=0} (-1 - \xi) + \xi^2 = \xi^2 - \xi - 1$.

(γ') Με $\omega(x) = f(x) - g(x) - \lambda = \varphi(x) - \lambda$ η ω έχει την ίδια παράγωγο με την φ και επομένως την ίδια μονοτονία. Άρα έχει ελάχιστο στο ξ που είναι το $m = \xi^2 - \xi - 1 - \lambda$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \omega(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + x^2 + x - \lambda\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + x^2 + x - \lambda\right) = +\infty$. Επομένως το πλήθος των ριζών της ω εξαρτάται από την ελάχιστη τιμή της m:

Αν $\mathbf{m < 0}$ τότε η ω έχει δύο ρίζες.

Αν $\mathbf{m = 0}$ τότε η ω έχει μία ρίζα.

Αν $\mathbf{m > 0}$ τότε η ω δεν έχει έχει καμμία ρίζα.

Θέλουμε να ισχύει η πρώτη περίπτωση. Αρκεί να είναι

$$\xi^2 - \xi - 1 < \lambda$$

Επειδή $\lambda > 1$ αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

$$\xi^2 - \xi - 1 < 1$$

δηλαδή

$$\xi^2 - \xi - 2 < 0 \tag{1}$$

Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τους $-1,\ 2$.Οι τιμές του τριψνύμου στους αριθμούς μεταξύ των $-1,\ 2$ είναι αρνητικές. Αλλά ο ξ είναι μεταξύ $-1,\ 0$ άρα και μεταξύ των $-1,\ 2$ επομένως πράγματι η (1) ισχύει.