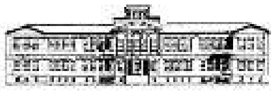
Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης



Τμήμα Γ1 Θετική

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

5 Δεκ 2005

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = lnx - 1$, $x \in [1, e]$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
2. (α΄) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f.

   (β΄) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινά σημεία.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι ισχύει

$$1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. (α΄) Να βρείτε το λ έτσι ώστε να ισχύει

   $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \lambda}{\text{ημ}\, x} = 0$$

   (β΄) Έστω ότι η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει x έτσι ώστε

   $$f(x) = x^{2005}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο: Σελίδα 199, Άσκηση Α10, i)
2. (α΄) Η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1 άρα και αντιστρέψιμη. Θα είναι $f(x) = y \Leftrightarrow lnx - 1 = y \Leftrightarrow lnx = 1 + y \Leftrightarrow x = e^{1+y}$. Επομένως $f^{-1}(y) = e^{1+y}$ και αυτό για κάθε y από το σύνολο τιμών της f δηλαδή το $[-1, 0]$. Άρα η αντίστροφη της f ορίζεται στο $[-1, 0]$ και έχει τύπο $f^{-1}(x) = e^{x+1}$.

   (β΄) Παρατηρούμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδία ορισμού $[1, e]$ και $[-1, 0]$ τα οποία είναι δύο ξένα σύνολα. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τους δεν έχουν κοινά σημεία.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο: Σελίδα 175, Άσκηση Α8, i)
2. (α΄) Έστω $g(x) = \frac{f(x)-\lambda}{\text{ημ}\, x}$ ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Θα πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Λύνοντας ως προς f βρίσκουμε ότι $f(x) = g(x)\, \text{ημ}\, x + \lambda$. Παίρνοντας όρια για $x \to 0$ βρίσκουμε ότι $1 = 0 \cdot 0 + \lambda$. Επομένως πρέπει $\lambda = 1$. Θα πρέπει τώρα να επαληθεύουμε αν για την τιμή $\lambda = 1$ πράγματι ισχύει ότι $g(x) = \frac{f(x)-\lambda}{\text{ημ}\, x}$. Δηλαδή ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x} = 0$. Από την υπόθεση

   $$1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$$

   έχουμε ότι $-x^2 \le f(x) - 1 \le x^2$. Επειδή μας ενδιαφέρουν τιμές κοντά στο 0 θα εργασθούμε με τιμές του x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $\text{ημ}\, x < 0$ οπότε $\frac{-x^2}{\text{ημ}\, x} \geq \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x} \geq \frac{x^2}{\text{ημ}\, x}$ δηλαδή $-x\left(\frac{x}{\text{ημ}\, x}\right) \geq \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x} \geq x\left(\frac{x}{\text{ημ}\, x}\right)$. Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left(\frac{x}{\text{ημ}\, x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x\left(\frac{x}{\text{ημ}\, x}\right)\right) = 0 \cdot 1 = 0$. Επομένως απο το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x} = 0$.
- Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\text{ημ}\, x > 0$ οπότε $\frac{-x^2}{\text{ημ}\, x} \leq \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x} \leq \frac{x^2}{\text{ημ}\, x}$ και εργαζόμενοι όπως πριν βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x}$

Άρα πράγματι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\text{ημ}\, x}$

(β΄) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^{2005}$. Απο την υπόθεση έχουμε ότι για όλα τα x θα ισχύει $1 - x^2 - x^{2005} \leq f(x) - x^{2005} \leq 1 + x^2 - x^{2005}$ δηλαδή

$$1 - x^2 - x^{2005} \leq g(x) \leq 1 + x^2 - x^{2005}$$

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + x^2 - x^{2005}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{2005}\right) = -\infty$ και αφού για όλα τα x είναι $g(x) \leq 1 + x^2 - x^{2005}$ θα ειναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Επομένως θα υπάρχει x_1 ώστε $g(x_1) < 0$.
- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + x^2 - x^{2005}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^{2005}\right) = +\infty$ και αφού για όλα τα x είναι $1 - x^2 - x^{2005} \leq g(x)$ θα ειναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Επομένως θα υπάρχει x_2 ώστε $g(x_2) > 0$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η συνεχής συνάρτηση g θα πάρει την τιμή μηδέν σε κάποιο x_0 μεταξύ των x_1, x_2 το οποίο θα είναι και λύση της εξίσωσης $f(x) = x^{2005}$.