Τάξη Γ

Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Διαγώνισμα στις Παραγώγους

Σχολικό Έτος 2004-2005

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε, όπου ορίζεται την παράγωγο της f.
2. (α΄) Έχει η f σημεία καμπής;

   (β΄) Έχει η f κατακόρυφες ασυμπτώτους;

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in (0, +\infty)$ η εξίσωση

   $$f(x) = tx + 1 \tag{1}$$

   έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

   $$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}, \quad x > 0$$

   είναι γνησίως αύξουσα.

   (γ΄) Έστω φ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει στο $t \in (0, +\infty)$ τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης (1). Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α2 ii) σελ. 227
2. (α΄) Είναι

   $$f'(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Η παράγωγος αλλάζει μονοτονία, όπου, αλλάζει μονοτονία η $\sigma\upsilon\nu x, \quad x < 0$ δηλαδή στα $k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \quad k < 0$ τα οποία αντιστοιχούν σε σημεία καμπής της f.

(β′) Η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτες.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α4 i) σελ. 268.

2. (α′) Η εξίσωση (1) γράφεται $f(x) - tx - 1 = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - tx - 1$, $x \geq 0$. Έχουμε $h'(x) = e^x - 1 - t$ και

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(1+t)$$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \ln(1+t)]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln(1+t), +\infty)$. Είναι $h(\ln(1+t)) = 0$ και επομένως η h αφού είναι γνησίως φθίνουσα παίρνει μόνο αρνητικές τιμές στο διάστημα $(0, \ln(1+t)]$. Ειδικότερα $h(\ln(1+t)) < 0$. Έχουμε ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x - tx - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{tx}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$) επομένως υπάρχει κάποιο x_1 στο διάστημα $[\ln(1+t), +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) > 0$. Από το θέωρημα του Bolzano έχουμε ότι η h έχει ρίζα στο $(\ln(1+t), +\infty)$ που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

   (β′) Είναι $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$ και επομένως $g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. Έστω $r(x) = xe^x - e^x + 1, \quad x \geq 0$. Είναι $r'(x) = xe^x > 0$. Άρα $r \uparrow$. Αφού $r(0) = 0$ θα είναι $r(x) > 0$ για $x > 0$. Επομένως και $q(x) > 0$ για $x > 0$. Άρα Άρα $g \uparrow$.

   (γ′) Θεωρούμε $t_1 < t_2$. Θέλουμε $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Ονομάζουμε $x_1 = \varphi(t_1)$ και $x_2 = \varphi(t_2)$. Τότε $f(x_1) = t_1 x_1 + 1$ και $f(x_2) = t_1 x_2 + 1$. Άρα $t_1 = \frac{f(x_1)-1}{x_1}$ και $t_2 = \frac{f(x_2)-1}{x2}$. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

   α) $\mathbf{x_1 = x_2}$. Τότε θα είναι $t_1 = t_2$ (άτοπο)

   β) $\mathbf{x_1 > x_2}$. Τότε θα είναι $g(x_1) > g(x_2)$ οπότε $t_1 > t_2$ (άτοπο).

   γ) $\mathbf{x_1 < x_2}$. Ισχύει αναγκαστικά αφού οι υπόλοιπες περιπτώσεις απορρίφθηκαν.

   Επομένως $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$.