Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικό Έτος 2005-2006
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^x$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την f.
2. Να λύσετε την εξίσωση $ex^{ex} = 1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f μία συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ για την οποία, για όλα τα x, ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

   $$f''(x)(1 - f(x)) = 1 + (f'(x))^2$$

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι συνεχής.

   (γ΄) Υποθέτουμε ότι η f εχει μία τουλάχιστον ρίζα.

   i. Να εξετάσετε αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 1$.

   ii. Να βρείτε την f.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^x$.

1. Σχολικό βιβλίο Α4 ii) σελ. 268
2. Έχουμε τις ισοδυναμίες:
   $ex^{ex} = 1 \Leftrightarrow x^{ex} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow (x^x)^e = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right)$
   Αλλά $f\left(\frac{1}{e}\right)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f που επιτυγχάνεται μόνο για $x = \frac{1}{e}$.
   Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{1}{e}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β5 i) σελ. 279.

2. (α′) Προκύπτει εύκολα αν παραγωγίσουμε δύο φορές την δοθείσα σχέση της υπόθεσης.

   (β′) Από την σχέση $f''(x)(1 - f(x)) = 1 + (f'(x))^2$ έχουμε ότι δε μπορεί για κάποιο x να είναι $f(x) = 1$. Άρα για όλα τα x είναι

$$f''(x) = \frac{1 + (f'(x))^2}{1 - f(x)} \quad (*)$$

   Αλλά η $f'(x)$ είναι συνεχής αφού παραγωγίζεται επομένως και η $\frac{1+(f'(x))^2}{1-f(x)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Άρα και η $f''(x)$ είναι συνεχής.

   (γ′) i. Η f'' δεν μηδενίζεται και αφού είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο x_0 ισχύει $f(x_0) > 1$. Τότε από την $(*)$ είναι $f''(x_0) < 0$ και επομένως η f'' είναι πάντα αρνητική. Αλλά από την υπόθεση η f έχει ρίζα ας την πούμε ρ. Τότε $f''(\rho) = \frac{1+(f'(\rho))^2}{1-f(\rho)} = \frac{1+(f'(\rho))^2}{1-0} > 0$ (άτοπο). Επομένως δεν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 1$.

   ii. Λύνουμε την σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ ως προς $f(x)$ και βρίσκουμε ότι για δοθέν $x \in (-2, 2)$ θα είναι

$$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{ή} \qquad f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2}$$

   Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται αφού δε μπορεί να είναι $f(x) > 1$ επομένως απομένει η δεύτερη. Άρα

$$f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2} \text{ για όλα τα } \quad x$$