ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τμήμα Γ΄ Θετική
Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4
13 Δεκ. 2006

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.
2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) \right)$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x + 1$.

1. Να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα
2. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
   (β΄) Η f είναι αντιστρέψιμη.
   (γ΄) Ισχύει $-1 < f^{-1}(0) < 0$.
   (δ΄) Για κάθε x, x_0 ισχύει $\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|$.
   (ε΄) Η f^{-1} είναι συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 146 ασκ. Α11
2. Οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται κοντά στο $+\infty$ και το αυτό ισχύει και για τη διαφορά τους. Είναι $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\left(x-1-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2x+2}{x-1+\sqrt{x^2-1}} =_{(x>0)} \frac{x\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$
   Άρα:
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 198 ασκ. Α7 ii)

2. (α′) Η f είναι συνεχής ως πολυώνυμο. Θεωρούμε τυχόντα πραγματικό αριθμό y. Ευκολα διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=+\infty$ και επομένως υπάρχουν x_1,x_2 έτσι ώστε $f(x_1)<0$ και $f(x_2)>0$. Ασφαλώς x_1,x_2 διάφορα και η συνεχής $f(x)-y$ έχει ρίζα t στο διάστημα με άκρα x_1,x_2. Αρα $f(t)=y$ και το y είναι τιμή της. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι $\mathbb{R}$

   (β′) Ευκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, επομένως και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$,

   (γ′) Από το ερώτημα 1. Η f έχει μία ρίζα ρ στο διάστημα $(-1,0)$ η οποία είναι, λόγω της μονοτονίας, και μοναδική. Θα είναι $f(\rho)=0$ και επομένως $f^{-1}(0)=\rho$. Αλλά $-1<\rho<0$. Άρα $-1<f^{-1}(0)<0$.

   (δ′) Έστω ότι $f^{-1}(x)=y$ και $f^{-1}(x_0)=y_0$. Θα είναι $f(y)=x$ και $f(y_0)=x_0$. Άρα

$$x=y^5+2y+1$$

$$x_0=y_0^5+2y_0+1$$

   Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$x-x_0=y^5-y_0^5+2(y-y_0) \tag{1}$$

   Στη γνωστή ταυτότητα

$$y^5-y_0^5=(y-y_0)\left(y^4+y^3y_0+y^2y_0^2+yy_0^3+y_0^4\right) \tag{2}$$

   παρατηρούμε ότι αν είναι $y\geq y_0$ θα είναι και $y^5\geq y_0^5$ ενώ αν είναι $y<y_0$ θα είναι και $y<y_0$. Άρα οι αριθμοί $y^5-y_0^5$, $y-y_0$ έχουν το ίδιο πρόσημο επομένως ο αριθμός $A=y^4+y^3y_0+y^2y_0^2+yy_0^3+y_0^4\geq 0$ είναι μη αρνητικός. Λόγω της (;;) η (;;) γίνεται

$$x-x_0=(y-y_0)(A+2)$$

   όπου $A\geq 0$. Άρα $|g(x)-g(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{A+2}\leq\frac{|x-x_0|}{2}$

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\leq\frac{1}{2}|x-x_0| \tag{3}$$

   (ε′) Η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει από την (;;) όπως ακριβώς στην άσκηση 183 του φυλλαδίου «Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων».