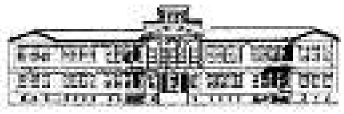
Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης



Τμήμα Γ′ Θετική

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

24 Οκτ. 2007

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι
$$(\alpha+\beta i)^{10}+(\beta-\alpha i)^{10}=0$$
2. Αν $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ να βρείτε για ποιές τιμές του θετικού ακεραίου n ισχύει
$$(\alpha+\beta i)^{n}+(\beta-\alpha i)^{n}=0$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει
$$|z-i|>|z+1|$$
2. Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z,\ v$ είναι γνωστό ότι
$$|z-i|>|z+1|, \qquad |v-i|>|v+1|$$
   (α′) Να αποδείξετε ότι $|z+v-i|>|z+v+1|$

   (β′) Να βρείτε που ανήκει η εικόνα του
$$w=\frac{1}{z+1}$$

Καλή Επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

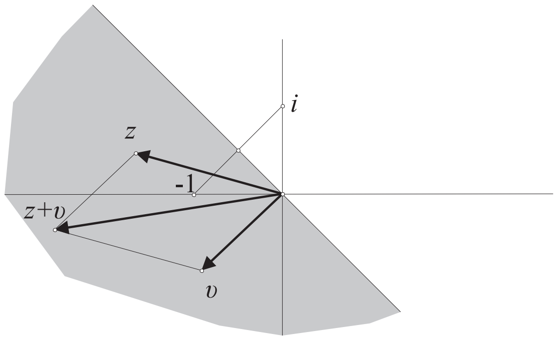
1. Σχολικό βιβλίο Β7 σελ. 96
2. Έχουμε $(\alpha+\beta i)^n+(\beta-\alpha i)^n=(\alpha+\beta i)^n+(-i(\beta i+\alpha))^n=(\alpha+\beta i)^n(1+(-i)^n)$ Επομένως θα είναι $(\alpha+\beta i)^n+(\beta-\alpha i)^n=0$ αν και μόνο αν $(\alpha+\beta i)^n(1+(-i)^n)=0$. Αλλά $(\alpha+\beta i)^n\neq 0$ επομένως θα είναι $(1+(-i)^n)=0$. Με $n=4k+v,\quad 0\leq v<4$ βρίσκουμε ότι $1+(-i)^n=1+(-i)^v$ το οποίο γίνεται μηδέν όταν $v=2$. Άρα οι ζητούμενε τιμές του n είναι $n=4k+2$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α6, β) σελ. 101

2. (α′) **Α′ Τρόπος** Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι ένας μιγαδικός $z = x + yi$ θα ικανοποιεί την σχέση $|z - i| > |z + 1|$ αν και μόνο αν $y < -x$. Άρα αν είναι $z = x + yi$ και $v = \kappa + \lambda i$ θα είναι από την υπόθεση $y < -x, \quad \kappa < -\lambda$. Άρα για τον μιγαδικό $z + v = (x + \kappa) + (y + \lambda)\, i$ θα ισχύει $x + \kappa < -(y + \lambda)$. Άρα ισχύει $|z + v - i| > |z + v + 1|$

Β′ Τρόπος Αν κάποιος έχει περιγράψει το σύνολο των z που ικανοποιούν την $|z - i| > |z + 1|$ ως το σύνολο που προκύπτει αν πάρουμε εκείνο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η μεσοκάθετος των εικόνων των -1 και i το οποίο περιέχει την εικόνα του -1 και του αφαιρέσουμε την αρχή του, δηλαδή τη μεσοκάθετο, τότε μπορεί να κάνει την απόδειξη διανυσματικά: Το πέρας του διανύσματος που αντιστοιχεί στο $z + v$ περιέχεται σε αυτό το σύνολο και επομένως ο $z + v$ έχει την ιδιότητα που θέλουμε.



(β′) Από την σχέση $w = \frac{1}{z+1}$ βρίσκουμε ότι είναι $z = \frac{1-w}{w}$. Για $z \neq -1$ και $w \neq 0$ έχουμε τις ισοδυναμίες
$|z - i| > |z + 1| \Leftrightarrow \left|\frac{1-w}{w} - i\right| > \left|\frac{1-w}{w} + 1\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1-w}{w} - i\right| > \left|\frac{1-w}{w} + 1\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1-w-iw}{w}\right| > \left|\frac{1}{w}\right| \Leftrightarrow$
$|1 - w - iw| > 1 \Leftrightarrow |(-1 - i)\, w + 1| > 1 \Leftrightarrow \left|(-1 - i)\left(w - \frac{1}{1+i}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow$
$|-1 - i|\left|\left(w - \frac{1}{1+i}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\left(w - \frac{1}{1+i}\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|\left(w - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι η εικόνα του w ανήκει στο εξωτερικό του κυκλικού δίσκου που γράφεται με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$