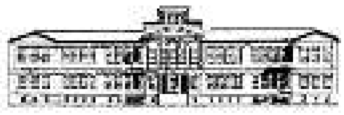
Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης



Τμήμα Γ Θετική

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

17 Δεκ. 2007

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
2. (α΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   (β΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1} = f$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
2. (α΄) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^2(x)-4}{f(x)+2}$

   (β΄) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Έστω:

   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x)(f(x)+2)^2 = 1$ για κάθε $x \neq 1$.
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής τέτοια ώστε: $h(0) > g(0)$.

   i. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση g.

   ii. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 145 άσκηση A1, iv).
2. (α΄) Άν x_1, x_2 είναι από το πεδίο ορισμού της f τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} > e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Rightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2} \Rightarrow \ln(1 - e^{x_1}) < \ln(1 - e^{x_2}) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα. Ακόμη είναι και συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Αφού το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, 0)$ το σύνολο τιμών της είναι το $f((-\infty, 0)) = \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty, 0)$.

   (β΄) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως 1-1 άρα είναι αντιστρέψιμη. Έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1 - e^x) = y \Leftrightarrow e^{\ln(1-e^x)} = e^y \Leftrightarrow 1 - e^x = e^y \Leftrightarrow e^x = 1 - e^y \Leftrightarrow_{(\text{για } y<0)} x = \ln(1 - e^y)$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το x έχει λύση για $y \in (-\infty, 0)$ την $x = \ln(1 - e^y)$. Άρα $f^{-1}(y) = \ln(1 - e^y)$ για $y \in (-\infty, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι η f^{-1} ορίζεται στο $(-\infty, 0)$ και $f^{-1}(x) = \ln(1 - e^x)$. Άρα $f^{-1} = f$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 176 άσκηση Β4, i).

2. (α′) Είναι $\frac{f^2(x)-4}{f(x)-2} = \frac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{f(x)-2} = f(x)+2$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^2(x)-4}{f(x)-2} = \lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2) = -2+2 = 0$.

   (β′) i. Παρατηρούμε ότι για $x \neq 1$ λόγω της $g(x)(f(x)+2)^2 = 1$ λεχουμε ότι $(f(x)+2)^2 \neq 0$. Άρα για κάθε $x \neq 1$ έχουμε $g(x) = \frac{1}{(f(x)+2)^2}$ και επομένως στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Την περίπτωση όπου $x_0 = 1$ πρέπει να την δούμε χωριστά. Το όριο της g στο 1 είναι $+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2)^2 = 0$ και κοντά στο 1 είναι $(f(x)+2)^2 > 0$. Επομένως το όριο της g στο 1 δε μπορεί να είναι ίσο με την τιμή της στο 1 που είναι πραγματικός αριθμός. Άρα η g είναι ασυνεχής στο 1. Τελικά η g είναι συνεχής σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 1 στον οποίο είναι ασυνεχής.

   ii. Θεωρούμε την διαφορά $s = g - h$. Αυτή είναι συνεχής στο $(0,1)$ διότι τόσο η g όσο και η h είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $(0,1)$. Είναι

   - $\lim\limits_{x\to 0} s(x) = \lim\limits_{x\to 0}(g(x)-h(x)) = g(1)-h(1) < 0$. Επομένως έχουμε ότι υπάρχει x_1 στο $(0,1)$ ώστε $s(x_1) < 0$.
   - $\lim\limits_{x\to 1} s(x) = \lim\limits_{x\to 0}(g(x)-h(x)) = +\infty$ αφού το όριο της g στο 1 είναι $+\infty$ ενώ της h είναι ο πραγματικός αριθμός $h(1)$. Επομένως υπάρχει x_2 στο $(0,1)$ ώστε $s(x_2) > 0$.

   Τα x_1, x_2 είναι δύο διαφορετικά στοιχεία του διαστήματος $(0,1)$ διότι οι τιμές της s σε αυτά είναι διαφορετικές αφού είναι ετερόσημες. Εφαρμόζονταστο θεώρημα του Bolzano για την συνεχή συνάρτηση s στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 συνάγουμε ότι υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2,άρα και στο διάστημα $(0,1)$ τέτοιο ώστε $s(x_0) = 0$. Το σημείο των $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ που αντιστοιχεί στο x_0 είναι κοινό σημείο των δύο γραφικων παραστάσεων.