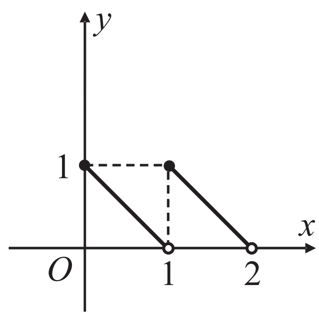
Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στα Όρια και τη Συνέχεια Συναρτήσεων
Σχολικό Έτος 2008-2009
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.
2. Να βρείτε:
   (α΄) Το πεδίο ορισμού της f.
   (β΄) Το σύνολο τιμών της f.
   (γ΄) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \sqrt{2} - 1$.
   (δ΄) Τα σημεία όπου η f είναι συνεχής.
   (ε΄) Την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x.
2. (α΄) Να βρείτε για ποιές τιμές:
   i. του λ ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = -8$.
   ii. του μ ισχύει $\lim\limits_{x\to\mu^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

   (β΄) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο άσκηση Β1. i) σελίδα 147

2. Από το διάγραμμα προκύπτουν οι ακόλουθες απαντήσεις:

   (α΄) $[0, 2)$

   (β΄) $(0, 1]$

   (γ΄) 2

   (δ΄) Όλα τα σημεία του $(0, 1) \cup (1, 2)$.

   (ε΄) Μέγιστη: 1 Ελάχιστη: δεν υπάρχει.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο άσκηση Α9. i)σελίδα 199

2. Έχουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$.

   (α΄) i. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\lambda^3 x^3 + 2\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\lambda^3 x^3}{x^3} = \lambda^3$ επομένως θέλουμε $\lambda^3 = -8$ από την οποία προκύπτει $\lambda = -2$.

   ii. Είναι $\lim\limits_{x \to \mu^+} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \mu^+} \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+1)}$. Για τις τιμές $\mu \neq -2,\ -1,\ 1$ το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός. Εξετάζουμε τις τιμές $-2,\ -1,\ 1$. Διαπιστώνουμε εύκολα, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και το πρόσημο της f ότι το όριο για αυτές τις τιμές του μ είναι $+\infty, -\infty, +\infty$. Επομένως $\mu = -2,\ 1$.

   (β΄) Για να έχουν οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν κοινό σημείο πρέπει η εξίσωση $g(x) = f(x)$ να έχει λύση. Ονομάζουμε $h(x) = g(x) - f(x)$ και θα αποδείξουμε ότι η h έχει ρίζα.

   - Για $x < 0$ αφού η g είναι φθίνουσα θα είναι $g(x) > g(0)$ και επομένως $g(x) - f(x) > g(0) - f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(0) - f(x)) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-f(x) + g(0)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right) + g(0)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$. Επομένως υπάρχει x_1 ώστε $g(0) - f(x_1) > 0$. Θα είναι τότε $h(x_1) = g(x_1) - f(x_1) > g(0) - f(x_1) > 0$.
   - Για $x > 0$ αφού η g είναι φθίνουσα θα είναι $g(x) < g(0)$ και επομένως $g(x) - f(x) < g(0) - f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(0) - f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x) + g(0)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right) + g(0)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$. Επομένως υπάρχει x_2 ώστε $g(0) - f(x_2) < 0$. Θα είναι τότε $h(x_2) = g(x_2) - f(x_2) < g(0) - f(x_2) < 0$.

   Προφανώς θα είναι $x_1 \neq x_2$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και παίρνει ετερόσημες τιμές στα x_1, x_2 και επομένως απο το θεώρημα του Bolzano έχει ρίζα στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2.