Ταξη Γ
Θετικη και Τεχνολογικη Κατευθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικο Ετος 2008-2009
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
2. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

1. (α′) Να βρείτε την $f'(0)$.
   (β′) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f.

Απαντησεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο B2 i) σελ. 286
2. Είναι $f''(x) = \frac{2-4x\ln 2+x^2\ln^2 2}{2^x}$. Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου είναι το ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $\left(\ln^2 2\right)x^2 - (4\ln 2)x + 2$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$ και $\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$. Η f στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right]$ είναι κυρτή, στο $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right]$ κοίλη και στο $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right)$ είναι κυρτή. Σημεία καμπής είναι τα $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right)\right)$, $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right)\right)$,

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο B11 σελ. 241
2. (α′) Είναι $g'(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$. Η g' έχει στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ μοναδική ρίζα το $\frac{\pi}{4}$ και επομένως, αφού είναι συνεχής, στα διαστήματα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ διατηρεί πρόσημο. Είναι $g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{3}-1\right) > 0$ και $g'(\frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}} < 0$. Επομένως η συνάρτηση g είναι
   - γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.
   - γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(β′) Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \eta\mu x$. Η h είναι γνησίως αύξουσα αφού το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχής και το σύνολο τιμών της είναι το $(-1, 1)$. Επίσης αν $h(x_1) < h(x_2)$ τότε θα είναι $x_1 < x_2$. Πράγματι:

Αν ήταν $x_1 = x_2$ τότε θα είχαμε $h(x_1) = h(x_2)$ δηλαδή $t_1 = t_2$ (άτοπο)

Αν ήταν $x_1 > x_2$ τότε αφού η h είναι γνησίως αύξουσα θα είχαμε $h(x_1) > h(x_2)$ δηλαδή $t_1 > t_2$ (άτοπο).

Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)}$$

Επίσης για όλα τα $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\boxed{f(h(x)) = g(x)}$$

Τώρα αν $t_1 < t_2$ από το $(-1, 1)$ με $t_1 = h(x_1)$, $t_2 = h(x_2)$ τότε:

- Αν είναι $-1 < t_1 < t_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ θα είναι $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{4}$ και επομένως $g(x_1) < g(x_2)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f(\eta\mu x_1) < f(\eta\mu x_2)$ δηλαδή $f(t_1) < f(t_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Αν είναι $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t_1 < t_2 < 1$ θα είναι $\frac{\pi}{4} \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ και επομένως $g(x_1) > g(x_2)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f(\eta\mu x_1) > f(\eta\mu x_2)$ δηλαδή $f(t_1) > f(t_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$