Ταξη Γ
Θετικη Κατευθυνση
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς
Σχολικο Ετος 2009-2010
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$. Θεωρούμε του μιγαδικούς w με $w = 2z + 1$.

1. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w.
2. Ποιός απότους μιγαδικούς w έχει ελάχιστο μέτρο;

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 z_2 \neq -1$.
Έστω $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Ο z είναι πραγματικός.
2. Οι εικόνες των z_1, z_2, z είναι σημεία συνευθειακά.

Απαντησεις

Ζητημα 1

1. Σχολικό βιβλίο Α8, σελ. 101.
2. Από την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί w ανήκουν στον κύκλο $|w - 1| = 2$ του οποίου το κέντρο είναι το σημείο $K(1, 0)$. Ζητάμε να βρούμε ποιό σημείο του κύκλου αυτού απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση. Το σημείο αυτό θα ανήκει στην ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το κέντρο του κύκλου δηλαδή στην ευθεία $y = 0$. Υπάρχουν δύο κοινά σημεία τα $A(-1, 0)$ και $B(3, 0)$. Από τα δύο ελάχιστη απόσταση (ίση με 1) απέχει το A που αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $w = -1$.

Ζητημα 2

1. Σχολικό βιβλίο Β8 β) σελ. 96
2. Για να είναι οι εικόνες Α, Β, Γ των μιγαδικών z_1, z_2, z σημεία συνευθειακά πρέπει και αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ να είναι παράλληλα. Αν οι z_1, z_2 συμπίπτουν τότε και τα Α, Β συμπίπτουν οπότε έχουμε τελικά δύο σημεία τα οποία φυσικά είναι συνευθειακά. Αν τώρα τα z_1, z_2 είναι διάφορα τότε και τα σημεία Α, Β είναι διαφορετικά. Για να είναι τα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ να παράλληλα πρέπει να υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με την

$$z - z_1 = \lambda\left(z_2 - z_1\right)$$

Έχουμε τώρα τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \text{Θα υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ τέτοιος ώστε } z - z_1 = \lambda\left(z_2 - z_1\right) &\Leftrightarrow \\ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\ \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} & \qquad (1) \end{aligned}$$

Αλλά: $\overline{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}} = \frac{\frac{\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}-\frac{1}{z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}-\frac{1}{z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_1^2+z_1z_2-z_1z_2-1}{(z_1z_2+1)z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_1^2-1}{(z_1z_2+1)z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\left(z_1^2-1\right)z_2}{(z_1-z_2)(z_1z_2+1)}$ και ακόμη $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}-z_1}{z_2-z_1} = -\frac{z_2(z_1-1)(z_1+1)}{(z_1z_2+1)(z_2-z_1)} = \frac{\left(z_1^2-1\right)z_2}{(z_1-z_2)(z_1z_2+1)}$ άρα η (1) ισχύει.