Ταξη Γ
Θετικη Κατευθυνση
Διαγώνισμα στα Όρια και τη Συνέχεια Συναρτήσεων
Σχολικο Ετος 2009-2010
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

1. Να βρείτε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
2. (α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
   (β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq \pm 1$ ισχύει $f^{-1}(x) = \frac{-1}{f(x)}$
   (γ′) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + f^{-1}(x) \right)$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ που πληρούν τις σχέσεις

$$f(0) < g(0) \ \text{ και } \ f(1) > g(1)$$

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστος ξ τέτοιος ώστε

$$\xi \in (0,1) \ \text{ και } \ f(\xi) = g(\xi) \tag{1}$$

2. Υποθέτουμε ότι για ένα αριθμό ξ που ικανοποιεί τις σχέσεις (1) του προηγουμένου ερωτήματος και για τα $f(0)$, $g(1)$ ισχύει επιπλέον:

$$f(\xi) < f(0) < g(1) \tag{2}$$

   Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \xi) \\ g(x) & x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

   (α′) Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής.
   (β′) Να εξετάσετε αν η h είναι 1-1.

Απαντησεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 145, Α2, ii)
2. (α′) Η f ορίζεται στο $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Με $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ έχουμε: $\frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow (1+x_1)(1-x_2) = (1+x_2)(1-x_1) \Rightarrow 1 - x_2 + x_1 - x_1x_2 = 1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη.
   (β′) Βρίσκουμε πρώτα την αντίστροφη της f: Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ με $x \neq 1$. Αυτή γράφεται

$$(y+1)x = y - 1$$

   Η παραπάνω εξίσωση
   i. για $y \neq -1$ έχει λύση ως προς x την $x = \frac{y-1}{y+1}$ ενώ
   ii. για $y = -1$ είναι αδύνατη

   Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 199, Β4.

2. (α′) Θεωρούμε $x_0 \in [0,1]$

   i. Αν $x_0 \in [0,\xi)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) =_{(f \text{ συνεχής })} f(x_0) = h(x_0)$

   ii. Αν $x_0 \in (\xi,1]$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) =_{(g \text{ συνεχής })} g(x_0) = h(x_0)$

   iii. Αν $x_0 = \xi$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to \xi^-} f(x) = f(\xi)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to \xi^+} g(x) = g(\xi)$ ενώ $h(\xi) = g(\xi)$. Επομένως λογω της (1) είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = h(x_0)$ και η h είναι συνεχής στο $x_0 = \xi$.

   Τελικά η h είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της άρα είναι συνεχής.

   (β′) Έστω ένας αριθμός y με $f(\xi) < y < f(0)) < g(1)$. Είναι

   - Είναι $f(\xi) < y < f(0))$ δηλαδή $h(\xi) < y < h(0))$ οπότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την συνεχή συνάρτηση h υπάρχει $x_1 \in (0,\xi)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = y$.
   - Είναι $f(\xi) < y < g(1))$ δηλαδή $h(\xi) < y < h(1))$ οπότε πάλι από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την συνεχή συνάρτηση h υπάρχει $x_2 \in (\xi,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = y$.

   Είναι $x_1 < \xi < x_2$ άρα $x_1 \neq x_2$ αλλά $h(x_1) = h(x_2) = y$. Επομένως η h δεν είναι 1-1.