Τάξη Γ
Θετική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
Σχολικό Έτος 2009-2010
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) η f είναι συνεχής
   (β′) $f'(1) = -\frac{1}{2}$
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 2^x$$

και

$$g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

1. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ή με άλλο τρόπο ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0, 1, B(1, 2)$.
2. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$. Να αποδείξετε ότι
   (α′) Η h είναι κυρτή.
   (β′) Η h έχει ελάχιστη τιμή

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, 286, Β5
2. Η f είναι παράγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και η παράγωγος της είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =_{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x}{1-x} =_{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 1}{-1} = -\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 0)$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, 250, Β7
2. (α΄) Είναι $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$, $h''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$. Άρα η h είναι κυρτή.

   (β΄) Αφού $h(0) = 0$, και $h(1) = 0$ η παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0, 1]$. Θα υπάρχει λοιπόν $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $h'(x_0) = 0$. Αλλά h είναι κυρτή επομένως η h' είναι γνησίως αυξουσα. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της h'. Για $x < x_0$ είναι $h'(x) < h'(x_0) = 0$ επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$. Για $x > x_0$ είναι $h'(x) > h'(x_0) = 0$ και επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Επομένως η h έχει ελάχιστο.