Τάξη Γ
Θετική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα στα Ολοκληρώματα
Σχολικό Έτος 2009-2010
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Ζήτημα 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^3 \ln x dx$.
2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\int_1^h x^3 \ln x dx}{h^5}$.

Ζήτημα 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x$ και $g(x) = 0$.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

Απαντήσεις

Ζήτημα 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 316, Α, 1, iii)
2. Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι μία παράγουσα της $x^3 \ln x$ είναι η $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4$. Επομένως:
$\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\int_1^h x^3 \ln x dx}{h^5} = \lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\left[\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4\right]_1^h}{h^5} = \lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4}h^4 \ln h - \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{16}}{h^5} =$
$= \lim\limits_{h\to+\infty} \left(\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4}h^4 \ln h - \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{16}}{h^5} \right) = 0$ διότι $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\ln h}{h} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{h}}{1} =$
0

Ζήτημα 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 338, Α, 1, iii)

2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |h(x)|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\, dx$. Θα βρουμε το πρόσημο της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f'(x) = -\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$ και $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Αφού η f είναι συνεχής θα είναι $f \downarrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f(0)\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot (-2) < 0$ επομένως, από το θεώρημα του Bolzano η f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ εχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 η οποία λόγω μονοτονίας είναι και μοναδική. Στο διάστημα $[0, x_0)$ η f δεν έχει ρίζα και επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο που θα είναι εκείνο του $f(0)$ δηλαδή θετικό. Ομοίως η f στο διάστημα $(x_0, \frac{\pi}{2}]$ η f θα είναι αρνητική. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$\int_0^{x_0} h(x)\, dx - \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\, dx = 2\eta\mu x_0 + 4\sigma\upsilon\nu x_0 - 3$$

Αλλά το x_0 είναι ρίζα της f δηλαδή $\sigma\upsilon\nu x_0 - 2\eta\mu x_0 = 0$ και επομένως $\varepsilon\varphi x_0 = \frac{1}{2}$. Από την ισότητα αυτή μπορούμε να βρούμε τα $\eta\mu x_0$, $\sigma\upsilon\nu x_0$ αφού $\eta\mu^2 x_0 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 = 1$ οπότε $\varepsilon\varphi^2 x_0 + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x_0}$ δηλαδή $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x_0} = \frac{5}{4}$ άρα $(\sigma\upsilon\nu x_0 > 0)$ $\sigma\upsilon\nu x_0 = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ και επομένως $\eta\mu x_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) - 3 = 2\sqrt{5} - 3$.