3ο ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ
Τάξη Γ, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Διαγώνισμα 6

Καθηγητής: *Ν.Σ. Μαυρογιάννης*

18 Ιανουαρίου 2002

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω z ένας μιγαδικός του οποίου η εικόνα ανήκει στην ευθεία

$$x + y = 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού iz ανήκει στην ευθεία
$$x - y + 1$$
2. Να εξετάσετε αν μπορεί να ισχύει:
   (α′) $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$
   (β′) $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι $z = \alpha + \beta i$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\alpha + \beta = 1$. Έστω ότι $zi = \kappa + \lambda i$. Είναι $zi = (\alpha + \beta i)\, i = -\beta + \alpha i$. Επομένως $\kappa = -\beta, \lambda = \alpha$. Για να ανήκει η εικόνα του zi στην ευθεία $x - y = -1$ πρέπει $\kappa - \lambda = -1$ δηλαδή $-\beta - \alpha = -1$ ή $\alpha + \beta = 1$ που ισχύει.
2. Επειδή το σημείο Ο δεν ανήκει στην ευθεία $x + y = 1$ όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί που ανήκουν στην ευθεία έχουν όρισμα. Εστω ότι $Arg(z) = \theta, |z| = \rho$ οπότε $z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho\sigma\upsilon\nu\theta + \rho i\eta\mu\theta$.
(α′) Αν $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ τότε $z = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} + i\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$. Πρέπει $\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2} = 1$ δηλαδή $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Επομένως η σχέση $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ μπορεί να ισχύει και αυτό συμβαίνει για τον $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
(β′) Αν $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ τότε εργαζόμενοι όπως πρίν βρίσκουμε ότι $z = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2}i$. Πρέπει $-\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2} = 1$ δηλαδή 0=1 (αδύνατο). Επομένως δε μπορεί να ισχύει $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g\,(x) = f'\,(x)\,(x - x_0) + f\,(x_0)$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$g'\,(x) - f'\,(x) = f''\,(x)\,(x - x_0)$$
2. Να αποδείξετε ότι το $M\,(x_0, f\,(x_0))$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ των f, g.
3. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο M.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$g\,(x) = f'\,(x)\,(x - x_0) + f\,(x_0) \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:
$g'\,(x) = (f'\,(x)\,(x - x_0) + f\,(x_0))' = f''\,(x)\,(x - x_0) + f'\,(x)\,(x - x_0)' + 0 = f''\,(x)\,(x - x_0) + f'\,(x) \cdot 1$ δηλαδή $g'\,(x) = f''\,(x)\,(x - x_0) + f'\,(x)$ από την οποία προκύπτει

$$g'\,(x) - f'\,(x) = f''\,(x)\,(x - x_0) \tag{2}$$

2. Το M προφανώς ανήκει στην $\mathcal{C}_f$. Από την (1) έχουμε ότι

$$g\,(x_0) = f'\,(x_0)\,(x_0 - x_0) + f\,(x_0) = f\,(x_0)$$

επομένως και η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο M δηλαδή το σημείο M είναι κοινό σημείο των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$.
3. Από την (2) έχουμε ότι $g'\,(x_0) - f'\,(x_0) = f''\,(x_0)\,(x_0 - x_0) = 0$ δηλαδή $g'\,(x_0) = f'\,(x_0)$. Επομένως οι εφαπτομένες στο M των δύο γραφικών παραστάσεων έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως άρα συμπίπτουν. Άρα οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $0 < \alpha < \beta$ και οι συναρτήσεις

$$\varphi\,(x) = \sqrt{(x + \alpha)\,(x + \beta)} - x$$

και

$$\psi\,(x) = \sqrt{(x + \alpha)\,(x - \beta)} - x$$

1. Να ορίσετε την συνάρτηση $\psi - \varphi$.
2. Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν
$$\lim_{x \to +\infty} \varphi\,(x) = 7$$
και
$$\lim_{x \to +\infty} \psi\,(x) = 5$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Το πεδίο ορισμού της $\psi-\varphi$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των πεδίων ορισμού $\mathcal{D}_\psi, \mathcal{D}_\varphi$ δηλαδή είναι το σύνολο $\mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\varphi$.
Επειδή $0<\alpha<\beta$ θα είναι $-\beta<-\alpha<0<\alpha<\beta$. Έχουμε
$x \in \mathcal{D}_\psi \Leftrightarrow (x+\alpha)(x+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$
$x \in (-\infty,-\beta] \cup [-\alpha,+\infty)$
και
$x \in \mathcal{D}_\varphi \Leftrightarrow (x+\alpha)(x-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$
$x \in (-\infty,-\alpha] \cup [\beta,+\infty)$
Επομένως $D_\psi \cap D_\varphi = (-\infty,-\beta] \cup [\beta,+\infty)$ και $(\psi-\varphi)(x) = \psi(x) - \varphi(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x-\beta)} - \sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}$
2. Είναι
$\phi(x) = \frac{\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right)\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}+x\right)}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}+x} =$
$= \frac{(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}+x} = \frac{x\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+x}$
Επομένως
$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}+1} =$
$= \frac{(\alpha+\beta+0)}{\sqrt{(1+0)(1+0)}+1} = \frac{\alpha+\beta}{2}$
Επειδή το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε ζεύγος αριθμών α,β ισχύει και για το ζεύγος $\alpha,-\beta$ οπότε έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Από τα δεδομένα έχουμε $\frac{\alpha+\beta}{2}=7, \frac{\alpha-\beta}{2}=5$. Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές ισότητες βρίσκουμε ότι $\alpha=12$ και $\beta=2$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Να αποδείξετε ότι αν για μία συνεχή συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχουν x_1,x_2 ώστε

$$h(x_1) = e^{-x_1}$$

και

$$h(x_2) = 2e^{-x_2}$$

τότε:

(α′) $x_1 \neq x_2$

(β′) Υπάρχει x_3 μεταξύ των x_1,x_2 έτσι ώστε

$$h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2-3x+2$$

Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(e^x h(x)) = 0$$

για όλα τα x.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. (α′) Αν ήταν $x_1=x_2$ τότε θα είχαμε $2e^{-x_2} = h(x_2) = h(x_1) = e^{-x_1} = e^{-x_2}$ δηλαδή $2e^{-x_2} = e^{-x_2}$ ή $2=1$ πράγμα αδύνατο. Άρα $x_1 \neq x_2$.
(β′) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $\varphi(x) = h(x) - \frac{3e^{-x}}{2}$ ορισμένη στο κλειστό διάστημα με άκρα τα x_1,x_2. Είναι

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \left(h(x_1) - \frac{3e^{-x_1}}{2}\right)\left(h(x_2) - \frac{3e^{-x_2}}{2}\right) =$$

$$= \left(e^{-x_1} - \frac{3e^{-x_1}}{2}\right)\left(2e^{-x_2} - \frac{3e^{-x_2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}e^{-x_1}e^{-x_2} < 0$$

Επομένως από το θεώρημα του Bolzano θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_3 στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_1,x_2 δηλαδή θα ισχύει $h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$.
2. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $e^x h(x)$ μηδενίζει την f επομένως θα είναι κάποιος από τις ρίζες της δηλαδή κάποιος από τους αριθμούς 1 ή 2. Άρα θα είναι $e^x h(x) = 1$ ή $e^x h(x) = 2$ δηλαδή για το συγκεκριμένο x θα είναι $h(x) = e^{-x}$ ή $h(x) = 2e^{-x}$. Θα αποδείξουμε ότι δε μπορεί για άλλα x να ισχύει η πρώτη σχέση και για άλλα η δεύτερη. Πράγματιν αν υποθέσουμε ότι για κάποιο x_1 έχουμε ότι $h(x_1) = e^{-x_1}$ και για κάποιο x_2 έχουμε ότι $h(x_2) = 2e^{-x_2}$ τότε από το 1. θα υπάρχει x_3 ώστε $h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$. Αλλά το $h(x_3)$ θα πρέπει να είναι ή το e^{-x_3} είτε το $2e^{-x_3}$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\frac{3e^{-x_3}}{2} = e^{-x_3}$ δηλαδή 3=2 και στην δεύτερη περίπτωση ότι $\frac{3e^{-x_3}}{2} = 2e^{-x_3}$ δηλαδή ότι 3=4. Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα

- ή για όλα τα x θα είναι $h(x) = e^{-x}$
- ή για όλα τα x θα είναι $h(x) = 2e^{-x}$

Επομένως οι ζητούμενες συνεχείς συναρτήσεις είναι οι e^{-x} και $2e^{-x}$.