Ταξη Γ
Θετικη και Τεχνολογικη Κατευθυνση
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
Σχολικο Ετος 2002-2003
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$$

1. Να εκφράσετε τον $y = \mathrm{Im}(z)$ ως συνάρτηση του $x = \mathrm{Re}(z)$

   15 μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι $|z| \geq \sqrt{2}$

   5 μοναδες

3. Να βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x είναι $-\frac{1}{4}$.

   5 μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι ίση με την συνάρτηση $g(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$.

   10 μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

   5 μοναδες

3. Να βρείτε τα:

   (α′) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   5 μοναδες

   (β′) $f'(0)$

   5 μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$\left|\frac{2z+1}{iz+1}\right| = 2$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $4x+8y=3$.

   13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $\frac{1}{z}$.

   12 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$.

1. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο του άξονα $x'x$ διέρχεται ακριβως μία εφαπτομένη της $\mathcal{C}_\varphi$.

   15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > 2$ η συνάρτηση $\sigma(x) = \varphi(x) + \varphi(x+1) + ... + \varphi(x+\nu-1)$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει

   $$\sigma^{-1}(x) = \frac{\ln x + \ln(\alpha-1) - \ln(\alpha^\nu - 1)}{\ln \alpha}$$

   Δίνεται ότι: Για κάθε πραγματικό αριθμό λ διάφορο του 1 ισχύει $1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{\nu-1} = \frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ