Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα
Σχολικό Έτος 2003-2004
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$g\left(x\right)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Να βρείτε:

1. Τα διαστήματα μονοτονίας της g.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Τα ακρότατα της g.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Το σύνολο τιμών της g.

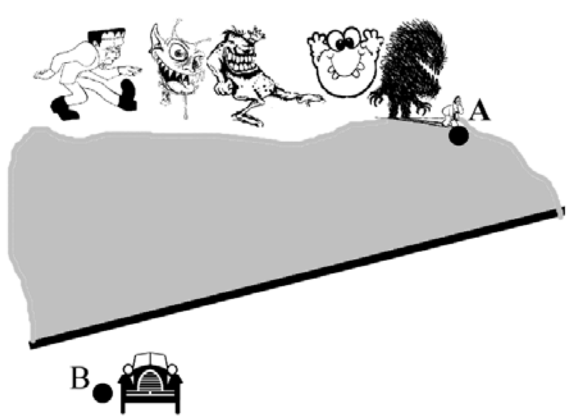
   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Τα διαστήματα που η g είναι κοίλη κυρτή.

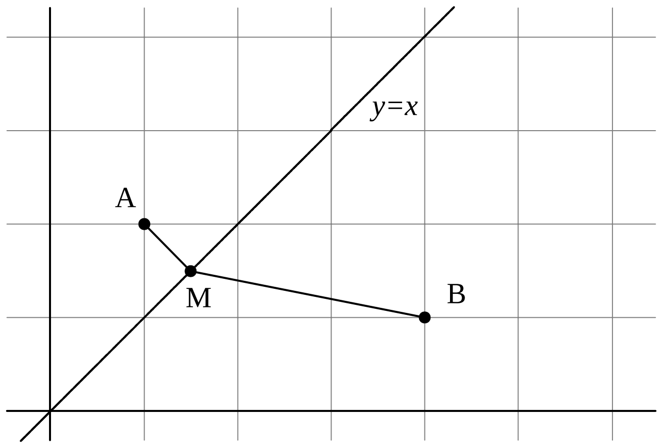
   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Ο κύριος Τρύφων κάνει περίπατο στο δάσος οπότε, αιφνιδίως αντιλαμβάνεται ότι του επιτίθενται διάφορα φοβερά τέρατα. Για να διασωθεί πρέπει από το σημείο $A(1,2)$ που βρίσκεται να φθάσει στο σημείο $B(4,1)$ όπου είναι σταθμευμένο το αυτοκίνητό του.



Πρέπει να διασχίσει ένα λιβάδι στο οποίο κινείται με ταχύτητα 2 και μετά να κινηθεί σε ένα γήπεδο με ταχύτητα 3. Το λιβάδι και το γήπεδο χωρίζονται από την ευθεία $y = x$. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται η ευθεία τα σημεία αλλά όχι ο κ.Τρύφων, το αυτοκίνητο και τα τέρατα.



Έστω $M(x, x)$ τυχόν σημείο της ευθείας $y = x$.

1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται ο κ. Τρύφων για να πάει:

   (α′) από το A στο M είναι $g(x) = \frac{\sqrt{2x^2-6x+5}}{2}$

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) από το M στο B είναι $h(x) = \frac{\sqrt{2x^2-10x+17}}{3}$

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν ο κ. Τρύφων διανύσει την διαδρομή από το A στο M και από το M στο B στον ελάχιστο δυνατό χρόνο τότε θα πρέπει

   (α′) $h'(x) = -g'(x)$

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $\frac{2x-5}{9h(x)} = \frac{3-2x}{4g(x)}$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε x ισχύει
$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt$$

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, dt = +\infty$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει ασύμπτωτη για $x \to +\infty$ την ευθεία $y = \alpha$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, dt = \alpha$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $k > 1$ και

$$I(x,k) = \int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-t} t^x dt$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$I(x+1,k) = -e^{-k} k^{x+1} + e^{-\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} + (x+1)\, I(x,k)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $x > 0$ τότε ισχύει

$$\lim_{k \to +\infty} \left(I(x+1,k) - (x+1)\, I(x,k) \right) = 0$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ