Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
Σχολικό Έτος 2004-2005
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   3 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται.

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με τετμημένη 2.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο της f στο $+\infty$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ με $x \neq 0$ ισχύει

$$f(x) - \sqrt{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^3} = 1$$

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει

$$z_1 \bar{z}_2 \neq 1 \quad (1)$$
$$z_3 = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \quad (2)$$

1. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ τότε ισχύει και $|z_3| < 1$.

   9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν ο z_3 έχει μέτρο 1 τότε κάποιος από τους z_1, z_2 έχει μέτρο 1.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Αν $|z_1| = 1$ και $z_2 = -i$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z_3.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x} + \frac{1}{\beta(x-1)}$$

ορισμένη στο $(0,1)$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

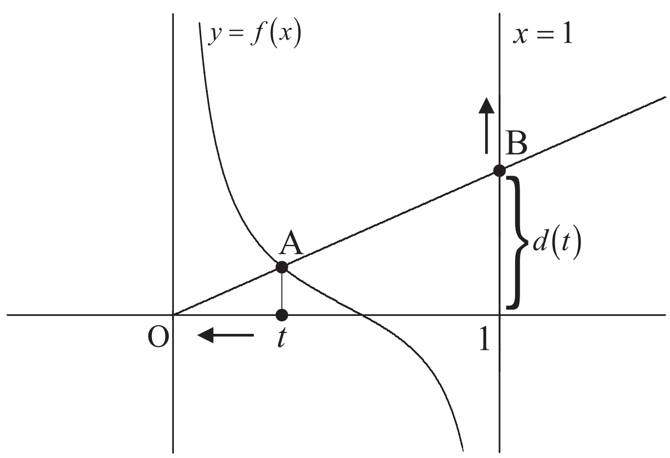
2. Να αποδείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι τιμή της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(0) = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Έστω $t \in (0,1)$, το σημείο $A(t, f(t))$ και B το σημείο τομής της ευθείας OA με την ευθεία $x = 1$.



Έστω $d(t)$ η απόσταση του B από τον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της $d(t)$, ως προς t, όταν $t = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$ είναι ίσος με $-\frac{(\beta+\alpha)^4}{\alpha^2\beta^3}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής και $p, q \in \Delta$ με $p < q$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $A\left(p, f\left(p\right)\right)$, $B\left(q, f\left(q\right)\right)$ είναι
$$y = f\left(p\right) + \frac{f\left(q\right) - f\left(p\right)}{q - p}\left(x - p\right)$$

   9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω
$$g\left(x\right) = f\left(p\right) + \frac{f\left(q\right) - f\left(p\right)}{q - p}\left(x - p\right)$$
   Δείξτε ότι αν $\eta \in \left(p, q\right)$ τότε υπάρχει $\xi \in \left(p, q\right)$ ώστε $f\left(\xi\right) = g\left(\eta\right)$.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Δείξτε ότι αν για κάθε $x \in \left(p, q\right)$ είναι $f\left(x\right) \neq g\left(x\right)$ τοτε για κάθε $x_1, x_2 \in \left(p, q\right)$ ϑα είναι
$$f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) + g\left(x_1\right) g\left(x_2\right) > f\left(x_1\right) g\left(x_2\right) + g\left(x_1\right) f\left(x_2\right)$$

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ