
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006
Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,
Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + 3\beta x - 5}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \quad \text{με } \alpha < 0$$

1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής.

(α') Να βρείτε τα α, β .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$ και $w = \frac{z-2i}{z+1}$, $z \neq -1$.

1. (α') Να λύσετε ως προς z την εξίσωση $w = 1 + 2i$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Έστω A, B και M οι εικόνες των μιγαδικών $-1, 2i$ και z στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι

$$|w| = \frac{(MB)}{(MA)}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο $A(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - 7}{x-1} = 10$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha') f(3) = 7$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$(\beta') f'(3) = 5$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ε έχει εξίσωση $y = 5x - 8$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β) Ένα σημείο Σ , που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία ε . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής περιττή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$f(x) = \alpha$$

έχει λύση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της f ;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Υποθέτουμε ότι για μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ