Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
17 Ιανουαρίου 2007

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Εκφωνήσεις-Απαντήσεις -Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + 2x + \lambda \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 + \lambda,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f'(1) = 4$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $\mathrm{A}(1, \mathrm{f}(1))$.
4. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία (ε) του ερωτήματος 3. σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2 τμ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Για να βρούμε το $f(1)$ αρκεί να αντικαταστήσουμε την τιμή $x = 1$ στη δοθείσα ανισότητα. Θα βρούμε ότι $1^2 + 2 \cdot 1 + \lambda \leq f(1) \leq 2 \cdot 1^2 + 1 + \lambda$ δηλαδή $3 + \lambda \leq f(1) \leq 3 + \lambda$. Άρα $\boxed{f(1) = 3 + \lambda}$

2. **1ος τρόπος**. Η απόδειξη του ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η εύρεση της παραγώγου της f θα γίνουν συγχρόνως. Σχηματίζουμε πρώτα το λόγο μεταβολής $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ της f στο 1. Αφαιρούμε πρώτα το $f(1) = 3 + \lambda$ από τα μέλη της δοθείσας ανισότητας και βρίσκουμε: $x^2 + 2x + \lambda - f(1) \leq f(x) - f(1) \leq 2x^2 + 1 + \lambda - f(1)$ ή $x^2 + 2x + \lambda - (3 + \lambda) \leq f(x) - f(1) \leq 2x^2 + 1 + \lambda - (3 + \lambda)$ δηλαδή

$$x^2 + 2x - 3 \leq f(x) - f(1) \leq 2x^2 - 2$$

Για να σχηματίσουμε το $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ πρέπει να διαιρέσουμε με $x - 1 \neq 0$. Επειδή δεν ξέρουμε ποιό είναι το πρόσημο του $x - 1$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περιπτωση 1. $x - 1 > 0$ δηλαδή $x > 1$. Τότε θα έχουμε

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

Απλοποιώντας τα κλάσματα βρίσκουμε $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x + 3$ και $\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2(x + 1)$. Επομένως έχουμε

$$x + 3 \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq 2x + 2$$

Παίρνοντας όρια για $x \to 1^+$ βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \to 1^+} (x + 3) = 4, \quad \lim_{x \to 1^+} (2x + 2) = 4$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι θα είναι και $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.

Περιπτωση 2. $x - 1 < 0$ δηλαδή $x < 1$. Τώρα διαιρούμε με τον αρνητικό αριθμό $x - 1$ και η ανισότητα μας θα αλλάξει φορά. Θα βρούμε ότι

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

που μετά τις απλοποιήσεις θα δώσει

$$2(x + 1) \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq x + 3$$

Παίρνοντας όρια αυτή τη φορά για $x \to 2^-$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής βρίσκουμε $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.

Άρα $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ και η f είναι παραγωγίσιμη με $\boxed{f'(1) = 4}$.

2ος τρόπος. Ονομάζουμε $h(x) = x^2 + 2x + \lambda$ και $g(x) = 2x^2 + 1 + \lambda$. Για όλα τα x ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και επομένως $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$ άρα $|f(x) - h(x)| \leq |g(x) - h(x)|$. Για $x \neq 1$ είναι $|x - 1| > 0$ και επομένως

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{|x - 1|} \leq \frac{|g(x) - h(x)|}{|x - 1|}$$

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Το α′ μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται και $\left|\frac{f(x)-h(x)}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)-f(1)-(h(x)-h(1))}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right|$ διότι $f(1) = h(1)$. Το β′ μέλος μετά από εύκολες πράξεις γίνεται $|x-1|$. Άρα

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right| \leq |x-1|$$

Από τη γνωστή ιδιότητα $|x| \leq A \Leftrightarrow -A \leq x \leq A$ έχουμε

$$-|x-1| \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \leq |x-1|$$

και

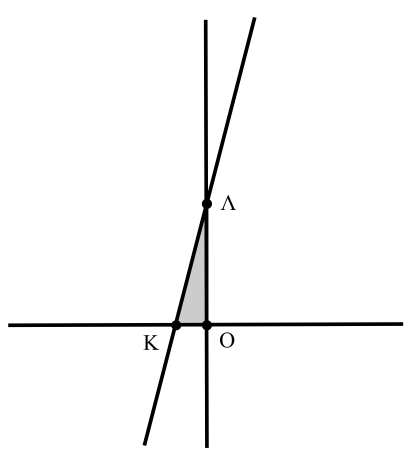
$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} - |x-1| \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{h(x)-h(1)}{x-1} + |x-1|$$

Όταν $x \to 1$ έχουμε $\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \to h'(1) = 4$ αφού $h'(x) = 2x+2$ και $|x-1| \to 0$. Το α′ μέλος και το γ′ μέλος της διπλής ανισότητας έχουν για $x \to 1$ όριο το 4. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.

ΔΕΙΤΕ: Τις ασκήσεις 5 και 6 σελίδα 221 του σχολικού βιβλίου.

3. Εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο που μας δίνει την εξίσωση εφαπτομένης βρίσκουμε ότι αυτή θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ δηλαδή $y-(3+\lambda) = 4(x-1)$. Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\boxed{y = 4x+\lambda-1}$.

4. Τα σημεία που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες βρί-



Το εμβαδόν του μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους:

1ος τρόπος Το ΟΚΛ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές ΟΚ και ΟΛ. Το εμβαδόν του είναι $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OK}\cdot \mathrm{O\Lambda}$ όπου τα μήκη ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα με $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right|$ και $|\lambda-1|$. Επομένως πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right|\cdot|\lambda-1| = 2$. Η εξίσωση αυτή γράφεται $\frac{1}{8}(\lambda-1)^2 = 2$ και λύνοντας την βρίκουμε $\boxed{\lambda=-3}$ και $\boxed{\lambda = 5}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι ουσιώδες να πάρουμε απόλυτες τιμές για να έχουμε τα μήκη. Τα $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda$ και $\lambda-1$ είναι ετερόσημα.

2ος τρόπος Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τύπο με την ορίζουσα οπότε το εμβαδόν είναι $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{O\Lambda}\right)\right|$ δηλαδή

$$\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}\,\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\right| = \frac{1}{8}(\lambda-1)^2$$

Θα καταλήξουμε στην ίδια εξίσωση με πριν και βέβαια στις ίδιες τιμές του λ.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1-iz}{z-i}$$

με $z \in \mathbb{C}-\{i\}$.
Συμβολίζουμε με Α, Β, Μ, Μ′ τις εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών αριθμών $i, -i, z, f(z)$ αντιστοίχως.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}-\{i\}$:

   (α′) Ισχύει
   $$f(z) = -i + \frac{2}{z-i}$$

   (β′) Το γινόμενο των μηκών ΑΜ και ΒΜ′ είναι σταθερό.

2. Στις ακόλουθες περιπτώσεις να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του Μ′. Σε κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν κάθε σημείο της γραμμής που θα αναφέρετε στην απάντηση σας είναι και σημείο του τόπου.

   (α′) Αν το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα 4 .

   (β′) Αν ο $z-i$ είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

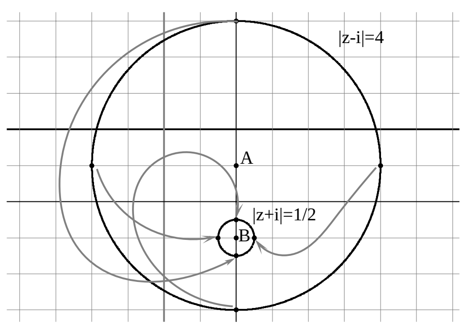
1. (α′) Η αποδεικτέα επαληθεύεται με απλό έλεγχο: $f(z) = -i+\frac{2}{z-i} \Leftrightarrow \frac{1-iz}{z-i} = -i+\frac{2}{z-i} \Leftrightarrow 1-iz = -i(z-i)+2 \Leftrightarrow 1-iz = 1-iz$ (ισχύει)

   (β′) Η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών αριθμών είναι το μέτρο της διαφοράς των δύο μιγαδικών (η σειρά δεν παίζει ρόλο). Έτσι $\mathrm{AM} = |\mathrm{i}-\mathrm{z}|$ και $\mathrm{BM}' = |-\mathrm{i}-\mathrm{f}(\mathrm{z})|$. Αξιοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε $BM' = |-i-f(z)| = \left|-i-\left(-i+\frac{2}{z-i}\right)\right| = \left|-\frac{2}{z-i}\right| = \frac{2}{|z-i|}$. Επομένως

   $$\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}' = |\mathrm{i}-\mathrm{z}|\cdot\frac{2}{|\mathrm{z}-\mathrm{i}|} = 2$$

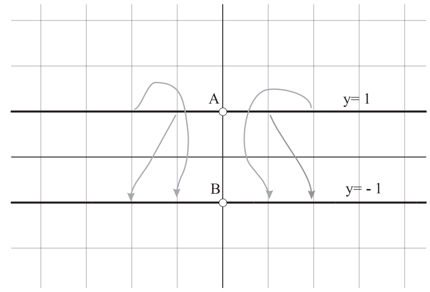
2. (α′) **1ος τρόπος.** Το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα 4 αν και μόνο αν $\mathrm{AM}=4$. Αλλά $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}'=2$ επομένως θα είναι $\mathrm{AM}=4$ αν και μόνο αν $\mathrm{AM}=\frac{2}{\mathrm{BM}'}=4$ δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{BM}'=\frac{1}{2}$ ισοδύναμα αν το Μ′ ανήκει στον κύκλο με κέντρο Β ακτίνα $\frac{1}{2}$. Λόγω των ισοδυναμιών ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ολόκληρος ο κύκλος $\left(\mathrm{B},\frac{1}{2}\right)$.

2ος τρόπος. Στον πρώτο τρόπο χρησιμοποιήσαμε το ερώτημα 1.(β′). Μπορεί το πρόβλημα να λυθεί και αυτοτελώς. Ξέρουμε ότι $|z-i|=4$ και ζητάμε τον γεωμετρικό τόπο του $w=f(z)=\frac{1-iz}{z-i}$. Είναι $w=\frac{1-iz}{z-i}$, $z\neq i\Leftrightarrow z(w+i)=iw+1,\quad z\neq i\Leftrightarrow z=\frac{iw+1}{w+i}$, $w\neq -i$. Αν τώρα είναι $|z-i|=4$ τότε ασφαλώς είναι $z\neq i$ και $w\neq -i$ και ακόμη $|z-i|=4\Leftrightarrow\left|\frac{iw+1}{w+i}-i\right|=4\Leftrightarrow\left|\frac{iw+1-i(w+i)}{w+i}\right|=4\Leftrightarrow\left|\frac{2}{w+i}\right|=4\Leftrightarrow\frac{2}{|w+i|}=4\Leftrightarrow|w+i|=\frac{1}{2}$. Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι $|w-(-i)|=\frac{1}{2}$ και επομένως κατλήγουμε πάλι στο συμπέρασμα ότι ο τόπος του Μ′ είναι ο κύκλος $\left(\mathrm{B}',\frac{1}{2}\right)$ (ολόκληρος λόγω των ισοδυναμιών) .



(β′) **1ος τρόπος.** Είναι $f(z)=-i+\frac{2}{z-i}$. Αν ο $z-i$ είναι μη μηδενικός πραγματικός τότε και ο $\frac{2}{z-i}$ είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Αν δε $t=\frac{2}{z-i}$ και ο $z-i$ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ τότε και ο $t=\frac{2}{z-i}$ μεταβάλεται σε όλο το $\mathbb{R}^*$. Επομένως είναι $f(z)=-i+t$, $t\in\mathbb{R}^*$. Άρα η τετμημένη της εικόνα του Μ′ είναι μη μηδενικός πραγματικός και η τεταγμένη -1. Άρα το Μ′ ανήκει στην ευθεία $y=-1$ από την οποία έχει εξαιρεθεί το σημείο της B.

2ος τρόπος. Είναι $z-i\in\mathbb{R}^*$. Κατ′ αρχήν λοιπόν θα είναι $\overline{z-i}=z-i$. Από τον δεύτερο τρόπο του προηγουμένου ερωτήματος έχουμε με $w=f(z)$ ότι $z=\frac{iw+1}{w+i}$ και $w\neq -i$. Από την σχέση $\overline{z-i}=z-i$ αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι θα ισχύει $\overline{\frac{iw+1}{w+i}-i}=\frac{iw+1}{w+i}-i$. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε $\overline{\left(\frac{2}{w+i}\right)}=\frac{2}{w+i}$ και επομένως $\overline{w+i}=w+i$ δηλαδή $\bar{w}-w=2i$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\mathrm{Im}(z)=-1$ και το σημείο Μ′ που αντιστοιχεί στο w ανήκει στην ευθεία $y=-1$. Αφού $w\neq -i$ από την ευθεία αυτή θα εξαιρεθεί το αντίστοιχο σημείο που είναι το Β.



ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f^2(x)-2xf(x)=1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για την οποία είναι $f(0)>0$.

1. Να βρείτε την f.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.
3. Να προσδιορίσετε το είδος μονοτονίας της f^{-1}.
4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)f(-x)=1$.
5. Να αποδείξετε ότι αν
$$\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right)=-1$$
τότε θα ισχύει $\alpha+\beta=0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. **1ος τρόπος.** Έστω τυχών πραγματικός αριθμός x. Γι′ αυτόν τον x θα ισχύει $f^2(x)-2xf(x)=1\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=1+x^2\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=1+x^2$ και επομένως από την τελευταία ισότητα ή θα είναι ή $f(x)-x=\sqrt{1+x^2}$ είτε $f(x)-x=\sqrt{1+x^2}$. Και επομένως *γιαυτόν* τον x θα είναι:

   - ή $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$
   - είτε $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$

   Δεν ξέρουμε όμως κάθε φορά για ένα x ποιός τύπος εφαρμόζεται. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε άλλη υπόθεση παρά μόνο το ότι $f^2(x)-2xf(x)=1$ ενδέχεται για άλλα x να ισχύει ότι $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ και για άλλα ότι $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$. Η υπόθεση όμως $f^2(x)-2xf(x)=1$ μας πληροφορεί ότι η f δεν έχει ρίζες. Πράγματι αν υποτεθεί ότι για κάποιο x ισχύει $f(x)=0$ τότε θα έχουμε ότι $0^2-2x\cdot 0=1$ πράγμα αδύνατο. Η f δεν έχει ρίζες και είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε *διάστημα*, το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Επομένως θα διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή

   - ή θα είναι $f(x)>0$ για όλα τα x
   - είτε θα είναι $f(x)<0$ για όλα τα x

   Η επιπλέον υπόθεση ότι $f(0)>0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει $f(x)>0$ για όλα τα x. Με αυτό το στοιχείο μπορούμε να αποκλείσουμε τον τύπο $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$ διότι δίνει αρνητικές τιμές στην f. Πράγματι $\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ και επομένως $x-\sqrt{1+x^2}<0$. Άρα τελικά ο τύπος της f είναι $\boxed{f(x)=x+\sqrt{1+x^2}}$.

2. **2ος τρόπος.** Για δοθέν x ζητάμε το $f(x)$ που μπορούμε να το δούμε ώς κάποιο άγνωστο $f(x)=y$. Θα είναι $y^2-2xy=1$ δηλαδή $y^2-2xy-1=0$. Έχουμε μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x. Την λύνουμε και βρίσκουμε $f(x)=y=x+\sqrt{1+x^2}$ ή $f(x)=y=x-\sqrt{1+x^2}$. Κατόπιν επιχειρηματολογούμε όπως στον προηγούμενο τρόπο.

3. **1ος τρόπος.** Αν έχουμε βρεί τον τύπο της f μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη:

   (α΄) Δείχνοντας ότι είναι 1-1:
   $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{1+x_1^2}=x_2+\sqrt{1+x_2^2}\Rightarrow x_1-x_2=\sqrt{1+x_2^2}-\sqrt{1+x_1^2}\Rightarrow(x_1-x_2)^2=\left(\sqrt{1+x_2^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right)^2\Rightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=2+x_2^2+x_1^2-2\sqrt{1+x_2^2}\sqrt{1+x_1^2}\Rightarrow x_1x_2+1=\sqrt{1+x_2^2}\sqrt{1+x_1^2}\Rightarrow(x_1x_2+1)^2=\left(1+x_2^2\right)\left(1+x_1^2\right)\Rightarrow x_1^2x_2^2+2x_1x_2+1=1+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2\Rightarrow(x_1-x_2)^2=0\Rightarrow x_1=x_2$

   (β΄) Δείχνοντας πρώτα ότι είναι γνησίως μονότονη συγκεκριμένα γνησίως αύξουσα χρησιμοποιώντας πράγματα που, επί του παρόντος, ξέρουμε από τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας. Είναι $f'(x)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}>\frac{x+\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+|x|}{\sqrt{1+x^2}}\geq 0$ και επομένως $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα

   Στη συνέχεια μπορούμε να μάθουμε τον τύπο της αντίστροφης λύνοντας τον τύπο $y=x+\sqrt{1+x^2}$ ως προς x. Θα βρούμε $x=\frac{y^2-1}{2y}$ και επομένως $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}}$. Εξίσου καλά μπορούμε να μάθουμε την f^{-1} από την $f^2(x)-2xf(x)=1$ που γράφεται $y^2-2xy-1=0$ και μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα αν λύσουμε ως προς x.

   2ος τρόπος. Αν δεν έχουμε βρεί τον τύπο της f ή τον έχουμε βρεί αλλά δεν θέλουμε να τον χρησιμοποιήσουμε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f είναι 1-1 υποθέτοντας ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε αφού $f^2(x_1)-2x_1f(x_1)=1=f^2(x_2)-2x_2f(x_2)$ θα έχουμε $-2x_1f(x_1)=-2x_2f(x_1)$ δηλαδή $x_1f(x_1)=x_2f(x_1)$. Προσέχοντας ότι η σχέση $f^2(x_1)-2x_1f(x_1)=1$ μας εξασφαλίζει ότι το $f(x_1)$ δε μπορεί να είναι 0 απλοποιώντας βρίσκουμε $x_1=x_2$. Ο τύπος της f^{-1} βρίσκεται όπως πριν από την $y^2-2xy-1=0$.

4. Ανεξάρτητα από το αν έχουμε βρεί τον τύπο της f στηριζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να έχουμε ως δεδομένο ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρούμε $f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$. Η f παίρνει μόνο θετικές τιμές. Η μονοτονία της μπορεί να βρεθεί αφενός από τον ορισμό: Αν $0<x_1<x_2$ τότε $f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)=\frac{1}{2}(x_1x_2+1)\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$. Άρα $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

5. **1ος τρόπος.** Χρησιμοποιώντας τον τύπο της f: $f(x)f(-x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sqrt{1+x^2}^2-x^2=1$

   2ος τρόπος. Χωρίς τον τύπο της f απλώς χρησιμοποιώντας την αρχική υπόθεση ότι $f^2(x)-2xf(x)=1$ και την παρατήρηση ότι η f παίρνει θετικές τιμές. Ονομάζουμε $y_1=f(x)$ και $y_2=f(-x)$. Ισχύει $y_1^2-2xy_1=1$ και $y_2^2+2xy_2=1$. Λύνοντας τις σχέσεις αυτές ως προς x βρίσκουμε $x=\frac{y_1^2-1}{2y_1}$ και $x=-\frac{y_2^2-1}{2y_2}$. Άρα $\frac{y_1^2-1}{2y_1}=-\frac{y_2^2-1}{2y_2}\Rightarrow 2y_2\left(y_1^2-1\right)+2y_1\left(y_2^2-1\right)=0\Rightarrow 2(y_1+y_2)(y_1y_2-1)=0\Rightarrow_{(y_1+y_2>0)}y_1y_2=1$.

6. Εδώ *χρειάζεται* να ξέρουμε ποιά είναι η f. Έχουμε $\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right)=-1\Rightarrow\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(\beta+\sqrt{1+\beta^2}\right)=1\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)=1\Rightarrow f(\alpha)=\frac{1}{f(\beta)}\Rightarrow f(\alpha)=\frac{1}{\frac{1}{f(-\beta)}}\Rightarrow f(\alpha)=f(-\beta)\Rightarrow\alpha=-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=0$ οπου χρησιμοποιήσαμε ότι η f είναι 1-1.

   ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το τελευταίο ερώτημα μπορεί να αποδειχθεί και αυτοτελώς ώς άσκηση που εμπίπτει στην ύλη της Α΄ Λυκείου.

ΔΕΙΤΕ: Την άσκηση 7 σελ. 200 του βιβλίου και την άσκηση 221 από το φυλλάδιο "Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων".

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(\alpha)=f(\beta)=0$$

και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων Α, Β της $\mathcal{C}_f$ υπάρχει σημείο Γ της $\mathcal{C}_f$ τέτοιο ώστε $A\Gamma=B\Gamma$.

2. Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$:

   (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό c με $c<f(x_0)$ η εξίσωση

   $$f(x)=c$$

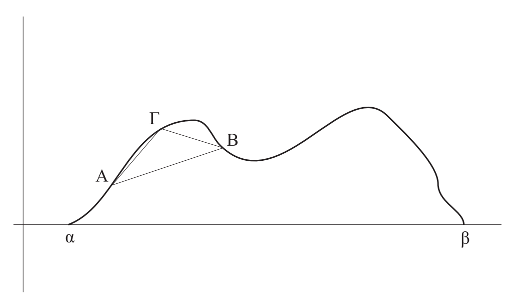
   έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α,β).

   (β΄) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x)=f(x_0)$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β) τότε

   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}=-\infty$$

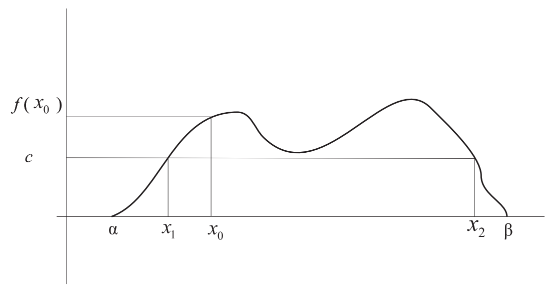
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Έστω $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $\Gamma(x,f(x))$ που ισαπέχει από τα A,B.



Αρκεί η εξίσωση $\sqrt{(x_1-x)^2+(f(x_1)-f(x))^2} = \sqrt{(x_2-x)^2+(f(x_2)-f(x))^2}$ ή ισοδύναμα η $(x_1-x)^2+(f(x_1)-f(x))^2 = (x_2-x)^2+(f(x_2)-f(x))^2$ να έχει λύση. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $h(x) = (x_1-x)^2+(f(x_1)-f(x))^2 - (x_2-x)^2 - (f(x_2)-f(x))^2$ και αρκεί να δείξουμε ότι έχει ρίζα. Αφού A, B είναι διαφορετικά θα είναι $x_1 \neq x_2$. Έχουμε $h(x_1) = -\left[(x_2-x_1)^2+(f(x_2)-f(x_1))^2\right] < 0$ και $h(x_2) = (x_1-x_2)^2+(f(x_1)-f(x_2))^2 > 0$ επομένως από το θεώρημα του Bolzano η h θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα με άκρα x_1, x_2.

2. (α′) Η f στο διάστημα $[\alpha, x_0]$ παίρνει σίγουρα τις τιμές $f(\alpha)=0$ και $f(x_0)$.



Επειδή $0 < c < f(x_0)$ από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και ο c είναι τιμή της f δηλαδή θα υπάρχει x_1 με $\alpha < x_1 < x_0$ ώστε $f(x_1) = c$. Επιχειρηματολογώντας με τον ίδιο τρόπο συνάγουμε ότι υπάρχει x_2 ώστε $x_0 < x_2 < \beta$ και $f(x_2) = c$. Η $f(x) = c$ λοιπόν έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1 < x_2$.

(β′) Στο προηγούμενο ερώτημα αυτό που αποδείξαμε ουσιαστικά είναι ότι αν κάποιος θετικός αριθμό c είναι μικρότερος από μία τιμή τς f τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις. Αν λοιπόν συμβαίνει η εξίσωση $f(x) = f(x_0)$ να έχει μία μόνο λύση (που φυικά θα είναι η x_0) ο θετικός αριθμός $f(x_0)$ δε μπορεί να είναι μικρότερος από κάποια τιμή της f. ’Αρα για όλα τα x θα είναι $f(x) \leq f(x_0)$ και το ίσον θα ισχύει μόνο όταν $x = x_0$. Συνεπώς για $x \neq x_0$ είναι $f(x) - f(x_0) < 0$. Επομένως αφού λόγω συνεχείας της f είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\frac{1}{f(x)-f(x_0)} = -\infty$.