Τάξη Γ
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
Σχολικό Έτος 2005-2006

Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,
Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + 2x + \lambda \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 + \lambda,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το $f(1)$.

   5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f'(1) = 4$.

   6 Μονάδες

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $\mathrm{A}(1, \mathrm{f}(1))$.

   6 Μονάδες

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία (ε) του ερωτήματος 3. σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2 τμ.

   8 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$$

με $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. Συμβολίζουμε με Α, Β, Μ, Μ′ τις εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών αριθμών $i, -i, z, f(z)$ αντιστοίχως.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{i\}$:

   (α′) Ισχύει

   $$f(z) = -i + \frac{2}{z - i}$$

   4 Μονάδες

   (β′) Το γινόμενο των μηκών ΑΜ και ΒΜ′ είναι σταθερό.

   4 Μονάδες

2. Στις ακόλουθες περιπτώσεις να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M′. Σε κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν κάθε σημείο της γραμμής που θα αναφέρετε στην απάντηση σας είναι και σημείο του τόπου.

   (α′) Αν το σημείο M ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα 4 .

   8 Μονάδες

   (β′) Αν ο $z - i$ είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

   9 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για την οποία είναι $f(0) > 0$.

1. Να βρείτε την f.

   5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

   5 Μονάδες

3. Να προσδιορίσετε το είδος μονοτονίας της f^{-1}.

   5 Μονάδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) f(-x) = 1$.

   5 Μονάδες

5. Να αποδείξετε ότι αν

   $$\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-\beta - \sqrt{1+\beta^2}\right) = -1$$

   τότε θα ισχύει $\alpha + \beta = 0$.

   5 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων A, B της $\mathcal{C}_f$ υπάρχει σημείο Γ της $\mathcal{C}_f$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = B\Gamma$.

   10 Μονάδες

2. Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

   (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό c με $c < f(x_0)$ η εξίσωση

   $$f(x) = c$$

   έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α, β).

   10 Μονάδες

   (β΄) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = f(x_0)$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) τότε

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)} = -\infty$$

   5 Μονάδες