Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
18 Απριλίου 2007

Διδάσκοντες:
Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,
Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

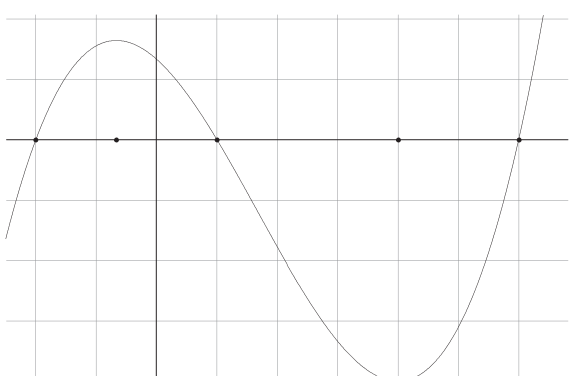
Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 8x + 12}{9}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:
   (α΄) Η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
   (β΄) Η f είναι κυρτή ή κοίλη.
2. Να αποδείξετε ότι αν $x > 4$ τότε είναι $f(x) > -4$.

Απαντηση

1. (α΄) Είναι $f'(x) = \frac{1}{9}(3x+2)(x-4)$ και επομένως $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, στο $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[4, +\infty)$ γνησίως αύξουσα.
   (β΄) Είναι $f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}$ και επομένως στο $(-\infty, \frac{5}{3}]$ η f είναι κοίλη και στο $[\frac{5}{3}, +\infty)$ η f είναι κυρτή.
2. Είδαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$ και επομένως αν είναι $x > 4$ θα είναι και $f(x) > f(4) = -4$.



ΖΗΤΗΜΑ 2

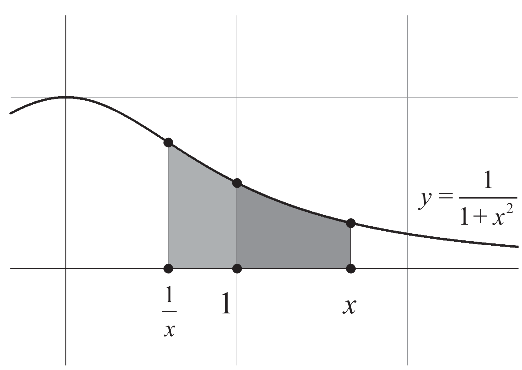
Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
2. Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο την f.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει:
$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Απαντηση

1. Με $f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ είναι $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Είναι $f(1) = 0$ και ο 1 είνα μοναδική ρίζα της f.
2. Απο τη μονοτονία της f έχουμε ότι αν $x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.
3. Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$. Είναι $h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$. Άρα η h είναι σταθερή. Αλλά $h(1) = f(1) + f(1) = 0$. Άρα $h(x) = 0$ γιά κάθε x.



[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 3

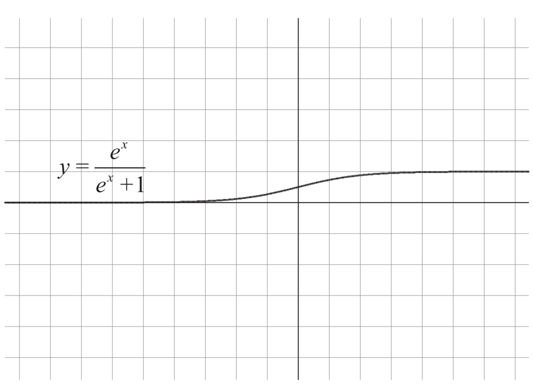
Για τις συναρτήσεις u, g, f που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ είναι $u(0) = 2,\ f(0) = \frac{1}{2}$ και για κάθε x ισχύει

- $u'(x) + u(x) = 1$
- $g(x) = u(x)\, e^x - e^x$
- $-f'(x) + f(x) = f^2(x)$
- $f(x) \neq 0$

1. Να αποδείξετε ότι g είναι σταθερή.
2. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει
$$u(x) = \frac{1 + e^x}{e^x}$$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1$$
4. Να βρείτε τη συνάρτηση f.
5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

Απαντηση

1. Έχουμε $g'(x) = u'(x)\, e^x + u(x)\, e^x - e^x = e^x\left(u'(x) + u(x) - 1\right) = 0$. Επομένως η g είναι σταθερή.
2. Είδαμε ότι η g είναι σταθερή και επομένως $g(x) = g(0) = u(0)\, e^0 - e^0 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Άρα $u(x)\, e^x - e^x = 1$ και λύνοντας ως προς $u(x)$ βρίσκουμε $u(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$.
3. Είναι $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} = \frac{-f'(x)+f(x)}{f^2(x)} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)} = 1$
4. Ονομάζουμε $u(x) = \frac{1}{f(x)}$. Τότε $u'(x) + u(x) = 1$ και $u(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Άρα από το ερώτημα 2. είναι $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x+1}{e^x}$ και επομένως $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.
5. Η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασυμτώτους. Τώρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$ επομένως στο $-\infty$ η συνάρτηση έχει ασύμπτωτο την $y = 0$ και στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτο την $y = 1$.



ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω

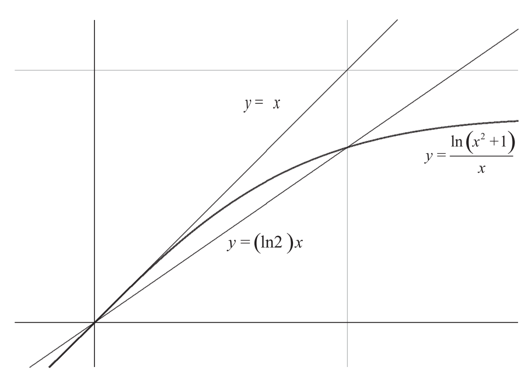
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Να αποδείξετε ότι:
$$f'(0) = 1$$
3. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(0, \mathrm{f}(0))$, $\mathrm{B}(1, \mathrm{f}(1))$ και ονομάζουμε:
   - (ε) την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της A.
   - (ζ) την ευθεία που διέρχεται από τα A, B.

   Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της $\mathcal{C}_f$ με θετικη τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ βρίσκεται κάτω από την (ε) και πάνω από την (ζ).
4. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = 0,\ y = 0,\ x = 1$. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\ln 2}{2} < E < \frac{1}{2}$$

Απαντηση

1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{x^2+1}}{1} = 0 = f(0)$
2. Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{x^2+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1$



3. Εύκολα βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη στο A είναι η $y = x$ και ότι η ευθεία AB είναι η $y = (\ln 2)\, x$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $(\ln 2)\, x < f(x) < x$ δηλαδή $(\ln 2)\, x < \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} < x$ ή ισοδύναμα ότι
$$(\ln 2)\, x^2 < \ln\left(x^2+1\right) < x^2$$

Η δεύτερη ανισότητα $\ln\left(x^2+1\right) < x^2$ προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $\ln x \leq x-1$ διότι $\ln\left(x^2+1\right) \leq x^2+1-1 = x^2$.

Η πρώτη ανισότητα $(\ln 2)\,x^2 < \ln\left(x^2+1\right)$ ισοδυναμεί με την $\ln\left(x^2+1\right) - (\ln 2)\,x^2 < 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$q\left(x\right) = \ln\left(x^2+1\right) - (\ln 2)\,x^2, \qquad x \in [0,1]$$

Είναι $q'\left(x\right) = 2x\frac{1-(\ln 2)x^2-\ln 2}{x^2+1}$. Το πρόσημο της $q'\left(x\right)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $1-(\ln 2)\,x^2 - \ln 2$. Είναι $1-(\ln 2)\,x^2-\ln 2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{1}{\ln 2}-1}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\sqrt{\frac{1}{\ln 2}-1}$ ορίζεται (αφού $\frac{1}{\ln 2}-1>0$) και ανήκει στο $(0,1)$ διότι $\sqrt{\frac{1}{\ln 2}-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2}-1<1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} < 2 \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln 2} > \sqrt{e} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e} \Leftrightarrow 4 > e$ (ισχύει). Με $\rho = \sqrt{\frac{1}{\ln 2}-1}$ είναι $f \uparrow$ στο $[0,\rho]$ και $f \downarrow$ στο $[\rho,1]$. Επειδή $q\left(0\right) = 0 = q\left(1\right)$ είναι $q\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Επομένως και η πρώτη ανισότητα ισχύει.

4. Το εμβαδόν E είναι ίσο με $\int_0^1 f\left(x\right)dx$. Έχουμε $x-f\left(x\right) \geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και στο ανοικτό ισχύει σαν γνήσια ανισότητα άρα $\int_0^1\left(x-f\left(x\right)\right)dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\int_0^1 f\left(x\right)dx < \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.
   Όμοια $\int_0^1\left(f\left(x\right)-(\ln 2)\,x\right)dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\int_0^1 f\left(x\right)dx > \int_0^1 (\ln 2)\,xdx = \frac{1}{2}\ln 2$. Άρα $\frac{1}{2}\ln 2 < E < \frac{1}{2}$.