Πειραματικο Λυκειο

της

Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση

Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

23 Ιανουαρίου 2008

Διδάσκοντες: *Σπυρίδων Αμούργης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Βασίλειος Τσίτσος*

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις[1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = -2 - i, \qquad z_2 = 4 + 2i$$

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = |z_1 \bar{z}_2 + z_2|$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$(z_1 + z_2)^{2008} + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^{2008}$$

είναι πραγματικός.

10 Μοναδες

3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - z_1| = 2\,|z - z_2|$$

10 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. $A = |z_1\bar{z}_2 + z_2| = |(-2-i)(4-2i) + (4+2i)| = |-6+2i| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

2. Ονομάζουμε $w = (z_1+z_2)^{2008} + (\bar{z}_1+\bar{z}_2)^{2008}$. Αν είναι $w = \kappa + \lambda i$ τότε $\bar{w} = \kappa - \lambda i$ και $w - \bar{w} = 2\lambda i$ άρα $\lambda = \frac{w-\bar{w}}{2i}$. Θα είναι $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = w$. Επομένως για να δείξουμε ότι είναι $w \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\bar{w} = w$. Πράγματι εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του συζυγούς βρίσκουμε: $\overline{w} = (\overline{z}_1 + \overline{z}_2)^{2008} + \left(\overline{\overline{z}}_1 + \overline{\overline{z}}_2\right)^{2008} = w$

3. Ονομάζουμε $z = x + yi$ και έχουμε τις ισοδυναμίες:
$|z - z_1| = 2\,|z - z_2| \Leftrightarrow$
$|x + iy + 2 + i| = 2\,|x + iy - 4 - 2i| \Leftrightarrow$
$|x + 2 + (y+1)\,i| = 2\,|(x-4) + (y-2)\,i| \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}^{\,2} = \left(2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$
$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4\left((x-4)^2 + (y-2)^2\right) \Leftrightarrow$
$(x+2)^2 + (y+1)^2 - 4\left((x-4)^2 + (y-2)^2\right) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4\left((x-3)^2 + (y-2)^2\right) = 0 \Leftrightarrow$
$-3x^2 - 3y^2 + 36x + 18y - 75 = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{-3x^2+36x-75-3y^2+18y}{-3} = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$
Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής
$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$
με $A = -12$, $B = -6$, $\Gamma = 25$. Είναι: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-12)^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 25 = 80 > 0$ επομένως η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή το σημείο $K(6,3)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = 2\sqrt{5}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

1. Ορίσετε την συνάρτηση $f + g$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

5 Μοναδες

3. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1}.

5 Μονάδες

4. Να ορίσετε την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$.

5 Μονάδες

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της $g^{-1} \circ f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

5 Μονάδες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Το άθροισμα τους θα έχει πεσίο ορισμού την τομή τους δηλαδή $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = (0, +\infty) \cap \mathbb{R} = (0, +\infty)$. Θα είναι δε $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1 - \ln x + \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Έχουμε:
[2]$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$
$\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}} \Rightarrow$
$e^{x_1}(1 + e^{x_2}) = e^{x_2}(1 + e^{x_1}) \Rightarrow$
$e^{x_1} + e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_2} + e^{x_1}e^{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow$
$x_1 = x_2$

3. Είναι $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ και επομένως για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της g είναι $y = \frac{e^x}{1+e^x}$. Λύνοντας ως προς x βρίσκουμε ότι:

   - Η εξίσωση $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ έχει λύση ως προς x αν και μόνο αν είναι $0 < y < 1$. Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $(0, 1)$.
   - Για $y \in (0, 1)$ η εξίσωση $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ έχει λύση $x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$ και επομένως $g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

   Συνοψίζοντας έχουμε ότι:

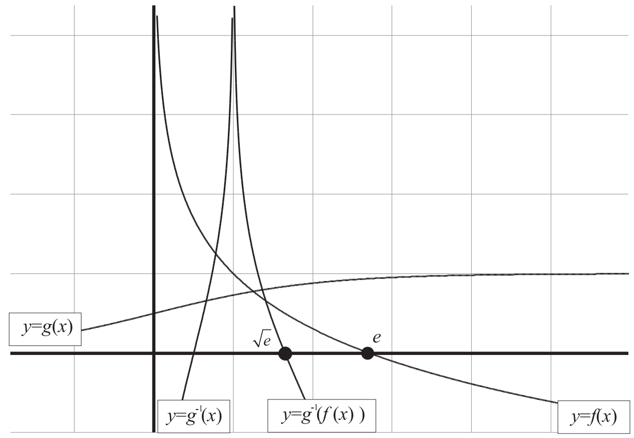
$$g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \ \ x \in (0, 1)$$

4. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g^{-1} \circ f$ απαρτίζεται από τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει ανήκει στο πεδίο ορισμού της g^{-1}. Αναζητούμε τις λύσεις του συστήματος:

$$x \in (0, +\infty) \ \text{ και } \ f(x) \in (0, 1)$$

   Έχουμε τις ισοδυναμίες:
$x \in (0, +\infty)\, 0, \ \text{και} \ \ f(x) \in (0, 1) \Leftrightarrow$
$x > 0, , \ \text{και}, \ \text{και} \ \ 0 < 1 - \ln x < 1 \Leftrightarrow$
$x > 0, \ \text{και} \ \ \ln x < 1, \ \text{και} \ \ \ln x > 0 \Leftrightarrow$
$x > 0, \ \text{και} \ \ x < e, \ \text{και} \ \ x > 1$
Τελικά το πεδίο ορισμού της $g^{-1} \circ f$ είναι το διάστημα $(1, e)$. Ο τύπος της $g^{-1} \circ f$ είναι $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right) = \ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right)$

5. Έχουμε:
$\left(g^{-1} \circ f\right)(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right) > 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1-\ln x}{\ln x} > 1 \Leftrightarrow$
$\frac{1-\ln x}{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1-2\ln x}{\ln x} > 0 \Leftrightarrow$
$(1 - 2\ln x)\ln x > 0$
Ονομάζουμε $t = \ln x$ και η τελευταία ανίσωση γίνεται $(1 - 2t)\,t > 0$ η οποία έχει λύσεις $0 < t < \frac{1}{2}$. Πρέπει λοιπόν $0 < \ln x < \frac{1}{2}$ δηλαδή $1 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
Τελικά η γραφική παράσταση της $g^{-1} \circ f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in (1, \sqrt{e})$.



ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ |x-2|\sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια της f.

10 Μονάδες

2. Να βρείτε την παράγωγο της f.

10 Μονάδες

3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

5 Μονάδες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Η συνάρτηση είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$. Στο διάστημα $[0, 1)$ η συνάρτηση είναι συνεχής αφού συμπίπτει με την συνεχή συνάρτηση $\sqrt{x}$. Επίσης στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι συνεχής διότι συμπίπτει με την συνάρτηση $|x-2|\sqrt{x}$ η οποία είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Ελέγχουμε την συνέχεια στο σημείο $x_0 = 1$. Είναι:

   - $f(1) = \sqrt{1} = 1$
   - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$
   - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} |x-2|\sqrt{x} = 1$

   Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$ άρα είναι συνεχής.

[2]Μπορεί να διαπιστωθεί και με απλή παραγώγιση ότι $g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

2. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $|x|$ αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως πρέπει να ασχοληθούμε και με το σημείο $x_0 = 2$ όπου η $|x-2|$ μηδενίζεται. Για να δούμε λοιπόν που παραγωγίζεται η f αναπτύσσουμε περαιτέρω την γραφή της f, απαλείφοντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ (2-x)\sqrt{x} & 1 < x < 2 \\ (x-2)\sqrt{x} & x \ge 2 \end{cases}$$

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$ η f παραγωγίζεται και η παράγωγός της βρίσκεται εφαμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης. Είναι αντιστοίχως: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $-\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$, $\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$. Κοιτάμε χωριστά την παραγωγισιμότητα στα σημεία 0, 1 και 2.

$\boxed{\mathbf{x=0}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$. Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο 0 διότι το όριο του λόγου μεταβολής της υπάρχει μεν αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός αλλά $+\infty$.

$\boxed{\mathbf{x=1}}$ Εδώ επειδή η f έχει διαφορετικό τύπο εκατέρωθεν του 1 θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της στο 1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$
Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2-x)\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{((2-x)\sqrt{x}-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}$
$= \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2-x)^2\sqrt{x}^2-1}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}$
$= \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-4x^2+4x-1}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)} =$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-3x+1)}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+1}{((2-x)\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{2}$. Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο 1 διότι τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής αν και πραγματικοί αριθμοί είναι άνισα.

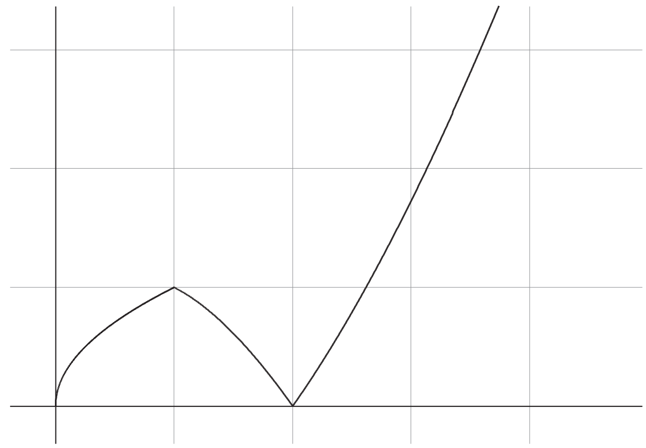
$\boxed{\mathbf{x=2}}$ Θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της στο 2. Είναι:
$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\sqrt{x}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x} = \sqrt{2}$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(2-x)\sqrt{x}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(-\sqrt{x}) = -\sqrt{2}$
Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο 2.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι (Οι αστερίσκοι δηλώνουν ότι στο αντίστοιχο σημείο η f δεν παραγωγίζεται):

$$f'(x) = \begin{cases} * & x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ * & x = 1 \\ -\frac{3x-2}{2\sqrt{x}} & 1 < x < 2 \\ * & x = 2 \\ \frac{3x-2}{2\sqrt{x}} & x > 2 \end{cases}$$

3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}|x-2|\sqrt{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\left(\frac{1}{x}=y\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} f(y) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{y} = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$.

Η γραφική παράσταση της f (δεν ζητείται από την εκφώνηση) είναι η ακόλουθη:



ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi : (0,+\infty] \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1. Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

5 Μοναδες

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι η φ έχει μοναδική ρίζα.

5 Μοναδες

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο A της $\mathcal{C}_f$ και σημείο B της $\mathcal{C}_g$ ώστε οι εφαπτόμενες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στα A, B να είναι παράλληλες.

10 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Έχουμε[3]:
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $-2\sqrt{x_1} > -2\sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $-\frac{1}{2\sqrt{x_1}} < -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} \Rightarrow$
$e^{x_1} - \frac{1}{2\sqrt{x_1}} < e^{x_2} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \Rightarrow$
$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$

[3] Φυσικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και παράγωγοι που είναι γνωστές από τα μαθήματα γενικής παιδείας

2. Η φ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, είναι φνησίως αύξουσα, έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και τα όρια της στα άκρα αυτού του διαστήματος είναι $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή το $\mathbb{R}$.

3. Αφού το σύνολο τιμών της φ είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0 το 0 είναι τιμή της φ και επομένως η φ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Λόγω της μονοτονίας η ρίζα αυτή είναι μοναδικη.

4. Για τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ έχουμε $f'(x) = e^x$ και $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Από το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $f'(x) - g'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση ας την πούμε ξ. Θα είναι $f'(\xi) = g'(\xi)$. Τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ ανήκουν στις $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ αντιστοίχως και οι εφαπτόμενες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στα σημεία αυτά δηλαδή οι ευθείες:

$$y = f'(\xi)\,x + f(\xi) - f'(\xi)\,\xi$$

$$y = g'(\xi)\,x + g(\xi) - g'(\xi)\,\xi$$

έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως. Θα δείξουμε ότι είναι παράλληλες αποδεικνύοντας ότι δεν συμπίπτουν. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

$$f(\xi) - f'(\xi)\,\xi \neq g(\xi) - g'(\xi)\,\xi \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι η (1) δεν αληθεύει. θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε:
$f'(\xi) = g'(\xi)$ και $f(\xi) - f'(\xi)\,\xi = g(\xi) - g'(\xi)\,\xi \Rightarrow$
$e^{\xi} = \sqrt{\xi}$ και $\sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \Rightarrow$
$e^{\xi} = \sqrt{\xi}$ και $\xi = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{e} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
$e = \frac{1}{2}$ (άτοπο)