ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
21 Ιανουαρίου 2009

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $T(z) = -2\bar{z} + i$.

1. Να βρείτε για ποιά u ισχύει $T(u) = 1$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει $|T(z_1 + z_2)| \leq 2(|z_1| + |z_2|) + 1$.
3. Να αποδείξετε ότι αν $|w| = 1$ τότε $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = T(w)$.
4. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}(iz) = 1$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $T(z)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $T(z) = 1 \Leftrightarrow -2\bar{z} + i = 1 \Leftrightarrow 2\bar{z} = -1 + i \Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
2. Έχουμε:
$|T(z_1 + z_2)| = |-2(\overline{z_1 + z_2}) + i| \leq |-2(\overline{z_1 + z_2})| + |i| = 2|z_1 + z_2| + 1 \leq 2(|z_1| + |z_2|) + 1$
3. Είναι $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = -2\left(\overline{\frac{1}{\bar{w}}}\right) + i = -2\left(\frac{1}{w}\right) + i = -2\left(\frac{\bar{w}}{w\bar{w}}\right) + i = -2\left(\frac{\bar{w}}{1}\right) + i = -2\bar{w} + i = T(w)$
Αλλιώς Είναι $\frac{1}{\bar{w}} = w$ και επομένως $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = T(w)$.
4. Ονομάζουμε $z = \kappa + \lambda i$ και $T(z) = x + yi$. Είναι $i(\kappa + \lambda i) = -\lambda + \kappa i$ και επομένως $\mathrm{Re}(iz) = 1$ αν και μόνο αν $\lambda = -1,\ \kappa \in \mathbb{R}$
Επομένως
$x + yi = T(z) \Leftrightarrow x + yi = -2(\kappa - \lambda i) + i \Leftrightarrow x + yi = -2\kappa + (2\lambda + 1)i \Leftrightarrow x = -2\kappa,\quad y = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow x = -2\kappa,\quad y = 2(-1) + 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ y = -1$. Αυτό σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $T(z)$ είναι η ευθεία $y = -1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

1. Να αποδείξετε οτι για κάθε x ισχύει
   (α′) $f(1-x) = -f(1+x)$
   (β′) $f'(1-x) = f'(1+x)$
2. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.
3. Αν $g(x) = \sqrt{x}$ και $h = g \circ f$
   (α′) Να ορίσετε την συνάρτηση h.
   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) + \eta\mu x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. (α′) Είναι
$f(1-x) =$
$(1-x)((1-x)-1)((1-x)-2) =$
$(1-x)(-x)(-x-1) =$
$(1-x)(-x)(-x-1) =$
$-(x-1)x(x+1) =$
$-(x+1)x(x-1) =$
$-(x+1)((x+1)-1)((x+1)-2) =$
$-(x+1)((x+1)-1)((x+1)-2) =$
$-f(x+1)$
   (β′) Αποδείξαμε ότι $f(1-x) = -f(x+1)$. Και τα δύο μέλη της ισότητας αυτής είναι συνθέσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων άρα συναρτήσεις παραγωγίσιμες. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:
$f'(1-x) \cdot (1-x)' = -f'(x+1) \cdot (x+1)'$
δηλαδή
$-f'(1-x) = -f'(x+1)$
άρα
$f'(1-x) = f'(x+1)$
2. Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(1) = 0$ επομένως η f αντιστοιχίζει ίσες τιμές σε δύο διαφορετικούς αριθμούς. Άρα δεν είναι 1-1
3. (α′) Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της $h = g \circ f$. Έχουμε:
$x \in \mathcal{D}_{g\circ f} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathcal{D}_f \\ \text{και} \\ f(x) \in \mathcal{D}_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$
$f(x) \geq 0$ Για να λύσουμε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ ή καταφύγουμε σε ένα πινακάκι όπου τοποθετούμε τους παράγοντες $x,\ x-1,\ x-2$ είτε

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

εξετάζουμε την μεταβολή προσήμου της f. Η συνεχής f έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1, 2 και σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0,1), (1,2)$, $(2,+\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Το πρόσημο αυτό βρίσκεται δοκιμάζοντας τιμές στην f, μία από κάθε διάστημα λ.χ. τις $-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3$. Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο βρίσκουμε ότι το πρόσημο της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά είναι αντιστοίχως $-,+,-,+$. Άρα η ανίσωση $f(x) \geq 0$ έχει σύνολο λύσεων το $(0,1] \cup [2,+\infty)$. Αυτό το σύνολο είναι και το πεδίο ορισμού της h.
Βρίσκουμε και ένα τύπο της f. Είναι: $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$

(β΄) Για $x > 2$ είναι

$$h(x) + \eta\mu x = h(x)\left(1 + \frac{\eta\mu x}{h(x)}\right) \quad (*)$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x(x-1)(x-2)} = +\infty$.
Έχουμε ακόμη ότι $-\frac{1}{|h(x)|} \leq \frac{\eta\mu x}{h(x)} \leq \frac{1}{|h(x)|}$. Επομένως αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|h(x)|} = 0$ από το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{h(x)} = 0$.
Επομένως το β΄ μέλος της $(*)$ όριο $+\infty$. Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x) + \eta\mu x) = +\infty$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε το σημείο $A(1,1)$ να ανήκει στην γραφική της παράσταση.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) > 0$.
2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2$, $x \in (0,1)$.
   (α΄) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
   (β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2f(x)$$
έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(1) = 1$. Για $x \in [0,1]$ είναι $x \leq 1$ και λόγω μονοτονίας θα είναι $f(x) \geq f(1) = 1$. Ιδιαιτερως θα είναι $f(x) \geq 0$.
2. (α΄) Θεωρούμε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε $\left\{\begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ \frac{1}{x}_1 > \frac{1}{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{f(x_1)} \leq \frac{1}{f(x_2)} \\ -\frac{1}{x}_1 < -\frac{1}{x}_2 \end{array}\right\} \underset{(+)}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{x_1} < \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{x}_2 \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{x_1} + 2 < \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{x}_2 + 2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$
   (β΄) Η g είναι μία γνησίως αύξουσα και συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το ανοικτό διάστημα με άκρα τα όρια της g στα 0, 1. Έχουμε
   - $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2\right) = -\infty$
     διότι $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \in \mathbb{R}$ (αφού η f είναι συνεχής στο 0) και $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{1} + 2 = 2$
     όπου πάλι χρησιμοποιήθηκε η συνέχεια της f αυτή τη φορά στο 1 και το γεγονός ότι $f(1) = 1$.

   Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 2)$.
3. Έχουμε
   $\frac{f(x)}{x} = 1 + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) = x + 2xf(x) \Leftrightarrow$ $x + 2xf(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow_{(\text{διαιρούμε δια } xf(x))} \frac{1}{f(x)} + 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ Αλλά η g έχει ρίζα αφού το σύνολο τιμών της περιέχει το 0 η οποία λόγω της μονοτονίας της g είναι μοναδική. Επομένως και η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

ΖΗΤΗΜΑ 4

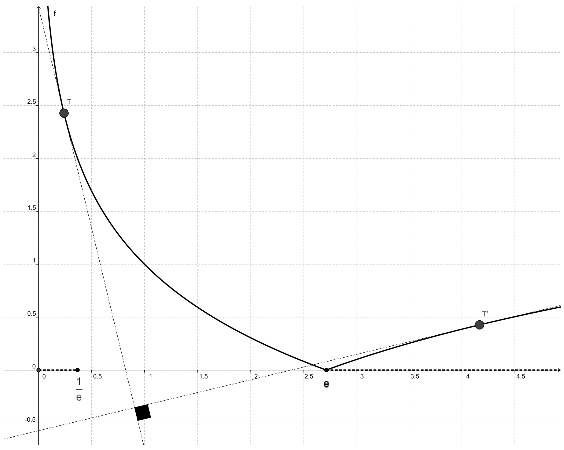
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x - 1|$. Έστω P το σημείο τομής P της $\mathcal{C}_f$ με τον άξονα των $x'x$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του P.
2. Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει εφαπτομένη σε όλα τα σημεία της εκτός από το P.
3. Έστω $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ και $T(x_0, f(x_0))$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο T. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ η οποία είναι κάθετη στην (ε).
4. Μεταβλητή ευθεία $y = c$, $c > 0$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ σε δύο σημεία A, B. Έστω M το μέσο του AB. Να εκφράσετε την τεταγμένη του M ως συνάρτηση της τετμημένης του M.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Ζητάμε τα σημεία της $\mathcal{C}_f$ με τετμημένη 0. Έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow |\ln x - 1| = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ Επομένως είναι $P(e, 0)$.
2. Η f είναι σύνθεση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $\ln x - 1$ που ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και της $|x|$ που παραγωγίζεται σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 0. Επομένως η f παραγωγίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $(0,+\infty)$ εκτός ίσως εκείνου που μηδενίζεται η $\ln x - 1$ δηλαδή του e. Ελέγχουμε αν παραγωγίζεται στο e. Έχουμε $\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{1 - \ln x}{x - e} = -\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = -\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{\ln x - \ln e}{x - e}$. Το τελευτίο όριο είναι η παράγωγος της $\ln x$ στο e δηλαδή ίσο με $\frac{1}{e}$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\frac{1}{e}$. Όμοια: $\lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{1}{e}$
   Αφού τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της f στο e είναι δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί η f δεν παραγωγίζεται στο e και επομένως δεν έχει εφαπτομένη στο P.

3. Είναι
$$f(x)=\begin{cases} 1-\ln x & 0<x<e \\ \ln x-1 & x\geq e \end{cases}$$
και
$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x} & 0<x<e \\ \frac{1}{x} & x>e \end{cases}$$
Ας υποθέσουμε ότι $0<x_0<e$. Η εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο T έχει συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0}$. Ζητάμε σημείο της $\mathcal{C}_f$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι κάθετη στην $\mathcal{C}_f$ δηλαδή να έχει συντελεστή διευθύνσεως $x_0>0$. Προφανώς θα αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{x_0}$ και πρέπει να είναι $\frac{1}{x_0}>e$. Δηλαδή θα πρέπει να είναι και $x_0<\frac{1}{e}$ που ισχύει.



4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $y=c$ με την $\mathcal{C}_f$ λύνοντας την εξίσωση $f(x)=c$. Είναι $f(x)=c\Leftrightarrow |\ln x-1|=c\Leftrightarrow \ln x-1=\pm c\Leftrightarrow \ln x=1\pm c\Leftrightarrow x=e^{1\pm c}$. Επομένως έχουμε δύο κοινά σημεία τα $A\left(e^{1-c},c\right),B\left(e^{1+c},c\right)$. Το μέσο του AB είναι το $M\left(\frac{e^{1-c}+e^{1+c}}{2},c\right)$. Αν ονομάσουμε x την τετμημένη του και y την τεταγμένη του είναι $y=c>0$ και επομένως
$$x=\frac{e^{1-y}+e^{1+y}}{2}$$
Έχουμε $x=\frac{e^{1-y}+e^{1+y}}{2}\Leftrightarrow \frac{e}{e^y}+e\cdot e^y=2x\Leftrightarrow_{(u=e^y>1)}\Leftrightarrow \frac{e}{u}+eu=2x\Leftrightarrow eu^2-2xu+e=0$ Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $u=\frac{x\pm\sqrt{x^2-e^2}}{e}$ και $x\geq e$. Θέλουμε $u>1$ και οι ρίζες που βρήκαμε είναι αντίστροφες διότι η $eu^2-2xu+e=0$ έχει ρίζες με γινόμενο 1. Επομένως μεγαλύτερη της μονάδας είναι η μεγαλύτερη δηλαδή η $u=\frac{x+\sqrt{x^2-e^2}}{e}$. Συνεπώς $e^y=\frac{x+\sqrt{x^2-e^2}}{e}$ από την οποία προκύπτει
$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-e^2}\right)-1$$