Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
21 Ιανουαρίου 2009

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννησ

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $T(z) = -2\bar{z} + i$.

1. Να βρείτε για ποιά u ισχύει $T(u) = 1$.

   5 Μοναδεσ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει $|T(z_1 + z_2)| \le 2(|z_1| + |z_2|) + 1$.

   7 Μοναδεσ

3. Να αποδείξετε ότι αν $|w| = 1$ τότε $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = T(w)$.

   5 Μοναδεσ

4. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}(iz) = 1$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $T(z)$.

   8 Μοναδεσ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

1. Να αποδείξετε οτι για κάθε x ισχύει

   (α′) $f(1-x) = -f(1+x)$

   5 Μονάδες

   (β′) $f'(1-x) = f'(1+x)$

   5 Μονάδες

2. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

   5 Μονάδες

3. Αν $g(x) = \sqrt{x}$ και $h = g \circ f$

   (α′) Να ορίσετε την συνάρτηση h.

   5 Μονάδες

   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) + \eta\mu x)$.

   5 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε το σημείο $A\,(1,1)$ να ανήκει στην γραφική της παράσταση.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) > 0$.

   5 Μονάδες

2. Έστω η συνάρτηση $g\,(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2$, $x \in (0,1)$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

   8 Μονάδες

   (β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

   7 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

   $$\frac{f\,(x)}{x} = 1 + 2f\,(x)$$

   έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$

   5 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x - 1|$. Έστω P το σημείο τομής P της $\mathcal{C}_f$ με τον άξονα των $x'x$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του P.

   5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει εφαπτομένη σε όλα τα σημεία της εκτός από το P.

   6 Μονάδες

3. Έστω $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ και $T(x_0, f(x_0))$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο T. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ η οποία είναι κάθετη στην (ε).

   9 Μονάδες

4. Μεταβλητή ευθεία $y = c$, $c > 0$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ σε δύο σημεία A, B. Έστω M το μέσο του AB. Να εκφράσετε την τεταγμένη του M ως συνάρτηση της τετμημένης του M.

   5 Μονάδες

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 τελευταίες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία