Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
21 Ιανουαρίου 2009

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

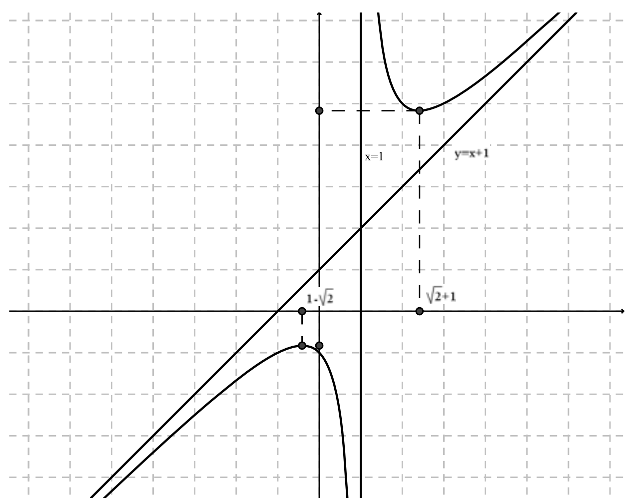
1. Να μελετηθεί η f:
   (α′) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   (β′) ως προς τα κοίλα και τα κυρτά.
2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.
3. Να βρεθεί συνάρτηση $F : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F(2) = 0$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Απαντησεις

1. (α′) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Παραγωγίζοντας την f στο $\mathcal{D}_f$ βρίσκουμε: $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Επομένως στα διαστήματα $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2}+1, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στα $\left[1-\sqrt{2}, 1\right)$, $\left[1, \sqrt{2}+1\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Εκατέρωθεν των $1-\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}+1$ η f αλλάζει μονοτονία. Στο $1-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(1-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}+2$ και στο $\sqrt{2}+1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{2}+1\right) = 2\sqrt{2}+2$. Επειδή στα $\mp\infty$ το όριο της f είναι $\mp\infty$ τα δύο αυτά ακρότατα είναι τοπικά.

   (β′) Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά την f βρίσκουμε ότι $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική στο $(-\infty, 1)$ και σε αυτό το διάστημα η f είναι κοίλη και είναι θετική στο $(1, +\infty)$ στο οποίο διάστημα η f είναι κυρτή.

2. **Α)** Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επομένως αν $\mathcal{C}_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αυτή θα είναι στο σημαίο 1. Πράγματι έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Η γνώση ενός και μόνο από τα δύο αυτά όρια μας επιτρέπει να συναγάγουμε ότι η $\mathcal{C}_f$έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x = 1$.
   Β) Για να δούμε αν η $\mathcal{C}_f$ έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)x} = 1 = \alpha$ και μετά το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 = \beta$. Επομένως η $\mathcal{C}_f$ έχει στο $+\infty$ την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή την $\boxed{y = x+1}$
   Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι στο $-\infty$ η $\mathcal{C}_f$ έχει ασύμπτωτο πάλι την $\boxed{y = x+1}$.
   Η γραφική παράσταση της f (δεν ζητήθηκε) είναι η εξής:



3. Για να βρούμε την F αρκεί να ολοκληρώσουμε την f στο διάστημα
   $\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{x-1}dx =_{x-1=u} \int \frac{(u+1)^2+1}{u}du = \int \left(u + 2 + \frac{2}{u}\right)du = \frac{1}{2}u^2 + 2u + 2\ln u + c =_{u=x-1} \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} + 2\ln(x-1) + c$
   Άρα $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} + 2\ln(x-1) + c$ και για να βρούμε το c δίνουμε στην F την τιμή 2 οπότε βρίσκουμε την εξίσωση $F(2) = \frac{5}{2} + c$ από την οποία έχουμε $c = -\frac{5}{2}$. Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 + 2\ln(x-1)}$

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = 2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + x^2$$

1. Να αποδειχθεί ότι

$$\varphi'(0) = \varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της φ.

3. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της φ.

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ώστε $\varphi''(\xi_1) = 0$.

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (-\pi, \pi)$ ώστε $\varphi'(\xi_2) = 2$.

Απαντησεις

1. Παραγωγίζουμε και βρίσκουμε

$$\varphi'(x) = 2x\eta\mu x + 2x = 2x(\eta\mu x + 1)$$

$$\varphi''(x) = 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x + 1)$$

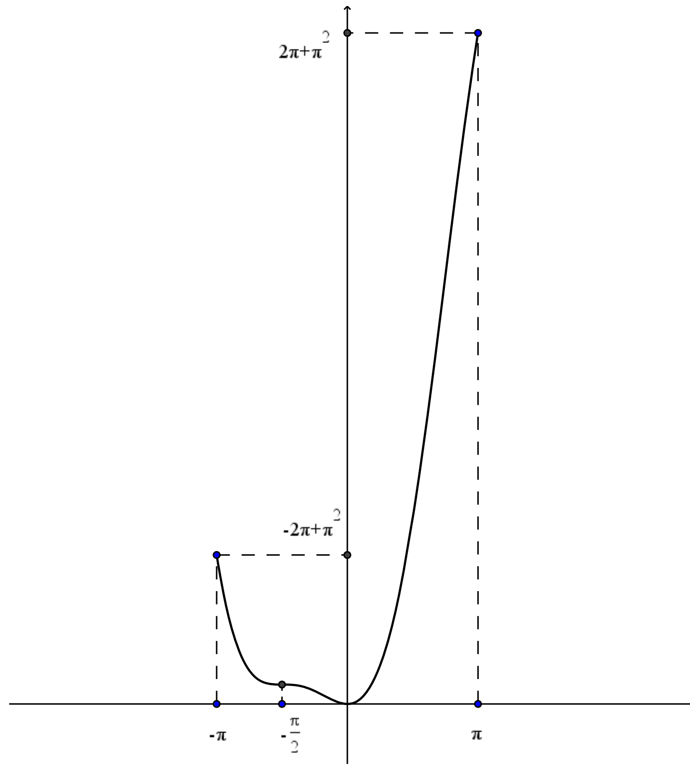
Η αποδεικτέα προκύπτει με απλή αντικατάσταση.

2. Είναι $\varphi'(x) = 2x(\eta\mu x + 1)$. Παρατηρούμε ότι ναι μεν η φ' μηδενίζεται στα $0, -\frac{\pi}{2}$ αλλά μόνο εκατέρωθεν του 0 αλλάζει πρόσημο. Συγκεκριμένα η είναι αρνητική στο $[-\pi, 0)$ και θετική στο $(0, \pi]$. Η φ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$. Η ελάχιστη τιμή της φ είναι η $\varphi(0) = 0$.

3. Από την μονοτονία της φ, (αφού είναι συνεχής) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της θα είναι ή ένωση των διαστημάτων $\varphi([-\pi, 0]) = \left[0, -2\pi + \pi^2\right]$ και $\varphi([0, \pi]) = \left[0, 2\pi + \pi^2\right]$. Επειδή είναι $2\pi + \pi^2 > -2\pi + \pi^2$ το $\left[0, -2\pi + \pi^2\right]$ περιέχεται στο $\left[0, 2\pi + \pi^2\right]$ και επομένως η ένωση είναι το $\left[0, 2\pi + \pi^2\right]$ που θα είναι και το σύνολο τιμών της φ. Άρα η μέγιστη τιμή της φ είναι $2\pi + \pi^2$.

4. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την φ' στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του μέσης τιμής για την φ στο $(-\pi, \pi)$.



ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \qquad x > 0$$

Έστω $\lambda > 0$. Συμβολίζουμε με $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- την γραφική παράσταση της f
- τον άξονα $x'x$
- τις ευθείες $x = \lambda$, $x = \lambda + 1$

1. Να αποδείξετε ότι

$$E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

2. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

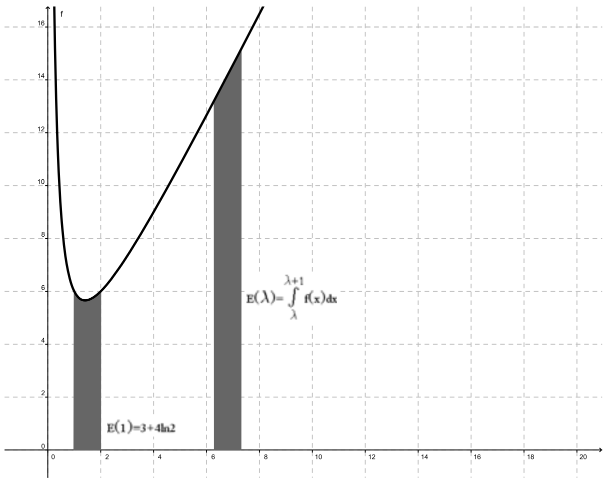
3. (α΄) Υπάρχει τιμή του λ ώστε $E(\lambda) = 6$;

   (β΄) Υπάρχει τιμή του λ ώστε $E(\lambda) = 5$;

Απαντησεις

1. Στο διάστημα $[\lambda, \lambda + 1]$ είναι $f(x) > 0$ και επομένως το εμβαδόν $E(\lambda)$ είναι $E(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+1} f(x)\,dx$ Μία παράγουσα της f είναι η $\Phi(x) = 2x + 4\ln x$ και επομένως:
$E(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+1} f(x)\,dx = \int_\lambda^{\lambda+1} \left(2x + \frac{4}{x}\right) dx = [\Phi(x)]_\lambda^{\lambda+1} = \left[x^2 + 4\ln x\right]_\lambda^{\lambda+1} = (\lambda+1)^2 + 4\ln(\lambda+1) - \lambda^2 - \ln\lambda = 2\lambda + 1 + 4\ln(\lambda+1) - 4\ln\lambda = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$

2. Η $E(\lambda)$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Είναι $E'(\lambda) = (\Phi(\lambda+1)-\Phi(\lambda))' = f(\lambda+1)-f(\lambda) = 2+\frac{4}{\lambda+1}-\frac{4}{\lambda} = \frac{2(\lambda+2)(\lambda-1)}{(\lambda+1)\lambda}$. Επομένως η παράγωγος $E'(\lambda)$ είναι αρνητική στο $(0,1)$ και θετική στο $(1,+\infty)$. Άρα η $E(\lambda)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι η $E(\lambda)$ έχει ελάχιστο για $\lambda=1$.



3. Η ελάχιστη τιμή του $E(\lambda)$ είναι $E(1)=3+4\ln 2$. Επειδή $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = +\infty$ το σύνολο τιμών της $E(\lambda)$ είναι $[3+4\ln 2,+\infty)$. Για να δούμε αν το εμβαδόν παίρνει μία συγκεκριμένη τιμή πρέπει να συγκρίνουμε την τιμή αυτή με το $3+4\ln 2$. Αν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη η ίση του $3+4\ln 2$ τότε είναι τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν. Αν είναι μικρότερη τότε πρόκειται για τιμή που δε μπορεί να πάρει το εμβαδόν.

   (α΄) Είναι $6 \geq 3+4\ln 2 \Leftrightarrow 3 \geq 4\ln 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \ln 2 \Leftrightarrow e^{\frac{3}{4}} \geq e^{\ln 2} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{4}} \geq 2 \Leftrightarrow e^3 \geq 2^4 \Leftrightarrow 19,\ldots \geq 16$ (ισχύει). Επομένως το 6 μπορεί να είναι τιμή του εμβαδού.

   (β΄) Είναι $5 \geq 3+4\ln 2 \Leftrightarrow 2 \geq 4\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \ln 2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \geq e^{\ln 2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \geq 2 \Leftrightarrow e \geq 2^2$ (δεν ισχύει). Επομένως το 5 δε μπορεί να είναι τιμή του εμβαδού.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε $\alpha > 0$ και την συνάρτηση

$$F(x) = \int_{e^\alpha}^{e^{\alpha x}} \left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right) dt$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της F.
2. Να βρείτε την παράγωγο F' της F.
3. Δίνεται ότι υπάρχει του τιμή $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει

$$F(x) \geq 0 \quad \text{για όλα τα} \quad x > 0 \quad (1)$$

   (α΄) Βρείτε ποια είναι η τιμή του α για την οποία ισχύει η (1)

   (β΄) Να αποδείξετε ότι $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt < e^2$

Απαντησεις

1. Το πεδίο ορισμού του ολοκληρωτέου $\ln t - \frac{1}{\ln t}$ είναι το $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Το A θα απαρτίζεται από εκείνα τα x για τα οποία:

   - τά άκρα ολοκλήρωσης e^α, $e^{\alpha x}$ ορίζονται και
   - ανήκουν και τα δύο σε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$.

   Επειδή $\alpha > 0$ είναι $e^\alpha > 1$ και επομένως ήδη το άκρο e^α ανήκει στο $(1,+\infty)$. Επομένως πρέπει και το άλλο άκρο $e^{\alpha x}$ να ανήκει στο $(1,+\infty)$. Άρα πρέπει $e^{\alpha x} > 1$ δηλαδή $\alpha > 0$. Το πεδίο ορισμού της F θα είναι το $A=(0,+\infty)$.

2. Είναι $F'(x) = \left(\ln(e^{\alpha x}) - \frac{1}{\ln(e^{\alpha x})}\right)(e^{\alpha x})' = \left(\alpha x - \frac{1}{\alpha x}\right)\alpha e^{\alpha x} = \frac{(\alpha x-1)(\alpha x+1)e^{\alpha x}}{x}$

3. (α΄) Επειδή $F(1)=0$ το α θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$F(x) \geq F(1)$$

   Επομένως θα πρέπει η παραγωγίσιμη συνάρτηση F να παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο 1 του πεδίου ορισμού της. Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $F'(1)=0$. Άρα πρέπει: $\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)e^\alpha}{1} = 0$ από την οποία συνάγουμε ότι, αφού $\alpha > 0$, ότι πρέπει $\boxed{\alpha = 1}$

   (β΄) Αφού η (1) ισχύει για $\alpha = 1$ θα είναι $\int_e^{e^x}\left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right) dt \geq 0$ για όλα τα $x > 0$. Επομένως θα ισχύει και για $x=2$:

$$\int_e^{e^2}\left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right) dt \geq 0$$

   Άρα: $\int_e^{e^2} \ln t dt - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq 0$ και επομένως

$$\int_e^{e^2} \ln t dt \geq \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad (*)$$

   Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \ln t dt$ και βρίσκουμε $\int_e^{e^2} \ln t dt = e^2$ οπότε αντικαθιστώντας στην (*) έχουμε:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq e^2$$