

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ  
της  
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση  
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά  
1 Απριλίου 2009

---

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

1. Να μελετηθεί η  $f$ :

(α') ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') ως προς τα κοίλα και τα κυρτά.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρεθεί συνάρτηση  $F : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $F(2) = 0$  και  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$\varphi(x) = 2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + x^2$$

1. Να αποδειχθεί ότι

$$\varphi'(0) = \varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $\varphi$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της  $\varphi$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  ώστε

$$\varphi''(\xi_1) = 0$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi_2 \in (-\pi, \pi)$  ώστε

$$\varphi'(\xi_2) = 2$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

Έστω  $\lambda > 0$ . Συμβολίζουμε με  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- την γραφική παράσταση της  $f$
- τον άξονα  $x'$
- τις ευθείες  $x = \lambda$ ,  $x = \lambda + 1$

1. Να αποδείξετε ότι

$$E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right)$$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το εμβαδόν  $E(\lambda)$  γίνεται ελάχιστο.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. (α') Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  ώστε  $E(\lambda) = 6$ ;  
(β') Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  ώστε  $E(\lambda) = 5$ ;

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε  $\alpha > 0$  και την συνάρτηση

$$F(x) = \int_{e^\alpha}^{e^{\alpha x}} \left( \ln t - \frac{1}{\ln t} \right) dt$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $F$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο  $F'$  της  $F$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Δίνεται ότι υπάρχει του τιμή  $\alpha > 0$  για την οποία ισχύει

$$F(x) \geq 0 \quad \text{για όλα τα } x > 0 \quad (1)$$

(α') Βρείτε ποια είναι η τιμή του  $\alpha$  για την οποία ισχύει η (1)

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να αποδείξετε ότι  $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt < e^2$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

---

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.  
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 τελευταίες διδακτικές ώρες.  
Καλή Επιτυχία*