ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
21 Απριλίου 2010

Διδάσκοντες:
Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$$

1. Να μελετήσετε την f:
   (α΄) Ως προς τη μονοτονία
   (β΄) Ως προς τα κοίλα-κυρτά
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -23$ γιά κάθε x.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει:
$$a^4 + 3^3 \geq 4a^3$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Είναι $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ και $f''(x) = 12x(x-2)$.
   (α΄) Έχουμε ότι η $f'(x)$ έχει ρίζες τους 0 και 3 και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$ ενώ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ και επομένως αφού η f είναι συνεχής και είναι $f \uparrow$ στο $(-\infty, 3]$ και $f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$.
   (β΄) Έχουμε ότι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ επομένως η f είναι:
      i. Κυρτή στο $(-\infty, 0]$
      ii. Κοίλη στο $[0, 2]$
      iii. Κυρτή στο $[2, +\infty)$

   Τα συμπεράσματα απεικονίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+		+	
$f'(x)$		−		−		−	0	+	
$f(x)$		↘		↘		↘		↗	

2. Η f έχει ελάχιστο το $f(3) = -23$ επομένως για κάθε x είναι $f(x) \geq -23$.
3. Είναι για κάθε α:
$f(\alpha) \geq -23 \Leftrightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 + 4 \geq -23 \Leftrightarrow \alpha^4 + 4 + 23 \geq 4\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^4 + 27 \geq 4\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^4 + 3^3 \geq 4\alpha^3$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f συνεχής στο$\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = 2\int_0^x te^{-f(t)}dt \text{ για κάθε } x$$

1. Να αποδείξετε οτι η f είναι παραγωγίσιμη.
2. Να αποδείξετε οτι ισχύει
$$f'(x)e^{f(x)} = 2x \text{ για κάθε } x$$
3. Να αποδείξετε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι
$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
5. Να αποδείξετε ότι
$$\lim_{x \to 0} \frac{(f \circ f)(x)}{(f(x))^{2010}} = +\infty$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και επομένως και ο ολοκληρωτέος $h(t) = te^{-f(t)}$ είναι συνάρτηση συνεχής. Συμπεραίνουμε ότι και $\int_0^x h(t)\,dt$ άρα και η $f(x) = 2\int_0^x h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη.
2. Παραγωγίζουμε και έχουμε $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$. Οπότε $f'(x) = \frac{2x}{e^{f(x)}}$ από την οποία βρίσκουμε $f'(x)e^{f(x)} = 2x$.
3. Από την σχέση $f'(x)e^{f(x)} = 2x$ έχουμε ότι $\left(e^{f(x)}\right)' = \left(x^2\right)'$. Συμπεραίνουμε ότι
$$e^{f(x)} = x^2 + c$$
Για να βρούμε το c θέτουμε στην σχέση $f(x) = 2\int_0^x te^{-f(t)}dt$ όπου $x = 0$ βρίσκουμε $f(0) = 0$. Επομένως $e^0 = c$ δηλαδή $c = 1$. Άρα $e^{f(x)} = x^2 + 1$ και επομένως $\ln e^{f(x)} = \ln\left(x^2 + 1\right)$ δηλαδή
$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης. Ευχαριστίες στον Νικόλαο Ζήση για τις παρατηρήσεις του

4. Παραγωγίζοντας την f βρίσκουμε $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του x. Η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Είναι

$$f((-\infty,0]) = \left[f\left(0\right), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)\right) = [0,+\infty)$$

$$f([0,+\infty)) = \left[\left(f\right)0, \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\right) = [0,+\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R}) = [0,+\infty) \cup [0,+\infty) = [0,+\infty)$$

5. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(x)}{(f(x))^{2010}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{(f(x))^{2010}} =_{\left(\frac{0}{0}\right)}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(f(x))f'(x)}{2010(f(x))^{2009}f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(f(x))}{2010(f(x))^{2009}} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}}{2010(f(x))^{2009}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}}{2010(f(x))^{2009}} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1005(f^2(x)+1)(f(x))^{2008}} =$
$= \lim\limits_{u\to 0^+} \frac{1}{1005(u^2+1)u^{2008}} = +\infty$ διότι $f(x) > 0$ για $x \neq 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-\ln x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής.
2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_g$.
3. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_g$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \alpha + 1$, $y = 0$ όπου $\alpha > e$.
   (α′) Να αποδείξετε ότι $g(a+1) < E(\alpha) < g(a)$.
   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$.

Απαντησεις

1. Η g ορίζεται στο $[0, +\infty)$. Στα $x_0 \in (0, +\infty)$ η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Για το σημείο $x_0 = 0$ πρέπει να ελέγξουμε την συνέχεια παίρνοντας όρια. Έχουμε
$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)}_{\downarrow\, 0} = 0 = g(0)$
αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$. Επομένως η g είναι συνεχής και στο 0 άρα είναι συνεχής.

2. Η δοθείσα ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως άρα αν είναι ασύμπτωτη θα είναι για $x \to \pm\infty$. Επειδή η g δεν ορίζεται στους αρνητικούς αριθμούς θα πρέπει να είναι ασύμπτωτη για $x \to +\infty$. Έχουμε
$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-\ln x}{\ln x - x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-\ln x}{x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)}\right) =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\ln x}{x} - 1}\right) = 0 \cdot (-1) = 0$ αφού
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Πράγματι λοιπόν η $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_g$

3. (α′) Ξέρουμε ότι $\ln x \leq x - 1$ άρα $x - \ln x \geq 1 > 0$. Επομένως $g(x) > 0$ για κάθε x. Η ότι g θετική επομένως $E(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx$. Μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την g αν μάθουμε το είδος μονοτονίας της. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και $g'(x) = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$. Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$ και αφού η g είναι συνεχής έχουμε:
   - Η g $\uparrow$ στο $[0, e]$
   - Η g $\downarrow$ στο $[e, +\infty)$

   Επίσης στο διάστημα $[e, \alpha]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως είναι

   $$g(\alpha) \geq_{(1)} g(x) \geq_{(2)} g(\alpha + 1)$$

   και η (1) ισχύει σαν ισότητα μόνο όταν $x = \alpha$ ενώ (2) ισχύει σαν ισότητα όταν $x = \alpha + 1$. Επομένως
   - Ισχύει $g(\alpha) - g(x) \geq 0$ για κάθε x χωρίς να είναι $g(\alpha) - g(x) = 0$ για όλα τα x
   - Ισχύει $g(x) - g(\alpha + 1) \geq 0$ για κάθε x χωρίς να είναι $g(x) - g(\alpha + 1) = 0$ για όλα τα x.

   Επομένως [2]
   - $\int_\alpha^{\alpha+1} (g(\alpha) - g(x))\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει $\int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx$
   - $\int_\alpha^{\alpha+1} (g(x) - g(\alpha + 1))\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει $\int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha + 1)\,dx$.

   Άρα $\int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha + 1)\,dx$ και έχουμε το αποδεικτέο $g(\alpha) > E(\alpha) > g(\alpha + 1)$

   (β′) Είδαμε προηγουμένως ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 1) = 0$ και επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 1$ όπως και $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} g\left(\underbrace{\alpha + 1}_{u}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} g(u) = 1$.
   Άρα από την σχέση

   $$g(\alpha) > E(\alpha) > g(\alpha + 1)$$

   και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Εστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή την δεύτερη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι:

- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$
- Η εξίσωση

  $$f(x)\,f'(x)\,f''(x) = 0 \qquad (1)$$

  έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β).

Να αποδείξετε ότι:

[2] Εδώ χρησιμοποιούμε την τυπική επιχειρηματολογία για την ολοκλήρωση ανισοτήτων.

1. Η μέγιστη τιμή της f είναι θετικός αριθμός.
2. Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
3. Η f είναι κοίλη.

Απαντησεισ

1. Η f ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ είναι και συνεχής επομένως έχει μέγιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε το $f(x_0)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f δηλαδή για κάθε x από το $[\alpha, \beta]$ να ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$. Επομένως και $f(x_0) \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Αλλά $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$. Άρα $f(x_0) > 0$. Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι θετικός αριθμός.

2. Αν $f(x_0)$ είναι το μέγιστο της f τότε αφού $f(x_0) > 0$ το x_0 δε μπορεί να είναι κάποιο από τα α, β διότι σε αυτά η τιμή της f είναι μηδέν. Άρα το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Επομένως από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το x_0 θα είναι λύση της εξίσωσης (1) στο $[\alpha, \beta]$. Αλλά στο $[\alpha, \beta]$ η (1) απότην υπόθεση έχει μοναδική λύση. Άρα το x_0 είναι η μοναδική λύση της (1). Αυτό σημαίνει ότι η f δε μπορεί να μηδενίζεται σε κανένα από τα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β). Αλλά ούτε και στο x_0 μηδενίζεται. Συνεπώς η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του (α, β) άρα, ως συνεχης, διατηρεί πρόσημο στο (α, β) το οποίο θα είναι «+» αφού $f(x_0) > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

3. Η f'' δε μπορεί να έχει ρίζα στο (α, x_0) γιατί μια τέτοια ρίζα θα ήταν και ρίζα της (1). Άρα αφού η f'' είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0). Συνεπώς η f' θα είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, x_0]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[\alpha, x_0]$ βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = f'(\xi)$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, x_0)$. Άρα

$$f'(\xi) = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{+}}{\underbrace{x_0 - \alpha}_{+}} > 0 = f'(x_0)$$

Είναι λοιπόν $\xi < x_0$ και $f'(\xi) > f'(x_0)$ και αφού ξέρουμε ότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, x_0]$ θα είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι $f''(x) < 0$ στο (α, x_0). Εργαζόμενοι όμοια βρίσκουμε ότι $f''(x) < 0$ και στο (x_0, β). Άρα η συνεχής συνάρτηση f' έχει παράγωγο (την f'') αρνητική στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ και επομένως η f είναι κοίλη.
Αλλοσ τροποσ. Θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να είναι $f''(x) \geq 0$ στο (α, β). Αν αυτό συνέβαινε η συνεχής συνάρτηση f' θα είχε μη αρνητική παράγωγο στο (α, β) επομένως[3] θα ήταν αύξουσα. Έχουμε τον πίνακα:

x	α		x_0		β
$f''(x)$		≥ 0		≥ 0	
$f'(x)$		$\nearrow$ ≤ 0	0	$f(x)$ $\nearrow$	
$f(x)$	0	$\searrow$ ≤ 0		≤ 0 $\nearrow$	0

από τον οποίο προκύπτει ότι η f είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός στο (α, β) πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το ερώτημα 1 όπου έχουμε αποδείξει ότι η f είναι θετική στο (α, β).

[3] Αυτό θέλει κάποια απόδειξη που είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη του ότι αν η παράγωγος είναι θετική σε κάποιο διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.