

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
21 Απριλίου 2010

Διδάσκοντες:

Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$$

1. Να μελετήσετε την f :

(α') Ως προς τη μονοτονία

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Ως προς τα κοίλα-κυρτά

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -23$ για κάθε x .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει:

$$a^4 + 3^3 \geq 4a^3$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ZΗΤΗΜΑ 2

Έστω f συνεχής στο \mathbb{R} τέτοια ώστε

$$f(x) = 2 \int_0^x t e^{-f(t)} dt \text{ για κάθε } x$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x) e^{f(x)} = 2x \text{ για κάθε } x$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f \circ f)(x)}{(f(x))^{2010}} = +\infty$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-\ln x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της \mathcal{C}_g .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την \mathcal{C}_g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \alpha + 1$, $y = 0$ όπου $\alpha > e$.

(α') Να αποδείξετε ότι $g(\alpha + 1) < E(\alpha) < g(\alpha)$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Εστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή την δεύτερη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι:

- $f(\alpha) = f(\beta) = 0, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$
- Η εξίσωση

$$f(x) f'(x) f''(x) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

Να αποδείξετε ότι:

1. Η μέγιστη τιμή της f είναι θετικός αριθμός.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Η f είναι κοίλη.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*