Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
26 Ιανουαρίου 2011

*Διδάσκοντες:*
Σπυρίδων Αμούργης, Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

*Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις* [1]

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, w$ ισχύει:

- $z_1^2 = 3 + i$
- $z_2^2 = 1 + 3i$
- $w = \frac{z_1}{z_2}$

1. Να αποδείξετε ότι ο $w$ δεν είναι πραγματικός

   5 Μοναδες

2. Βρείτε το μέτρο του $w$.

   5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{w-1}{w+1}$ είναι φανταστικός.

   5 Μοναδες

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $v$ για τους οποίους ισχύει $\left|v - z_1^2\right| = \left|v + z_2^2\right|$.

   5 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό $u$ ισχύει:

$$|u + w| + |u - w| \geq 2$$

   5 Μοναδες

## Απαντησεις

## ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Αν συνέβαινε $w \in \mathbb{R}$ θα ήταν και $w^2 \in \mathbb{R}$. Αλλά $w^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{3+i}{1+3i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \notin \mathbb{R}$ (άτοπο). Αρα $w \notin \mathbb{R}$

2. $|w| = \sqrt{|w|^2} = \sqrt{|w^2|} = \sqrt{\left|\frac{z_1^2}{z_2^2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{3+i}{1+3i}\right|} = \sqrt{\frac{|3+i|}{|1+3i|}} = 1$

3. Θέλουμε το πραγματικό μέρος του $\frac{w-1}{w+1}$ δηλαδή ο αριθμός
$$\frac{\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} + \frac{w-1}{w+1}}{2}$$
να είναι μηδέν. Αρκεί: $\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} = -\frac{w-1}{w+1}$. Έχουμε: $\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} = \frac{\bar{w}-1}{\bar{w}+1} =_{w\bar{w}=1} \frac{\frac{1}{w}-1}{\frac{1}{w}+1} = \frac{1-w}{1+w} = -\frac{w-1}{w+1}$

4. Είναι $z_1^2 \neq -z_2^2$ και επομένως οι εικόνες των $z_1^2, -z_2^2$ ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα. Θα είναι $\left|v - z_1^2\right| = \left|v - \left(-z_2^2\right)\right|$ και επομένως η εικόνα του $v$ θα ανήκει στην μεσοκάθετο του παραπάνω τμήματος που είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

5. $|u + w| + |u - w| = |u + w| + |w - u| \geq |(u + w) + (w - u)| = 2|w| = 2$

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1. Αν $f(1) = f'(1) = 1$ να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $g(x) = f^2(x)$ όταν $x = 1$.

   6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x - a} = f'(a)\, e^{f(a)}$$

   7 Μοναδες

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h}$$

   7 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t > 1$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{(t+1)\, f(t+1) + (t-1)\, f(t-1)}{2t}$$

   5 Μοναδες

## Απαντησεις

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

## ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι $g'(x) = \left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$ και επομένως $g'(1) = 2f(1)f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

2. Ονομάζουμε $h(x) = e^{f(x)}$. Είναι: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x-a} = h'(a)$. Αλλά $h'(x) = \left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$ επομένως $h'(a) = f'(a)e^{f(a)}$. Άρα το δοθέν όριο είναι ίσο με $f'(a)e^{f(a)}$

3. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h^2) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h^2) - f(0)}{h^2} \cdot h$. Αλλά $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h^2) - f(0)}{h^2} =_{h^2=u} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(u) - f(0)}{u-0} = f'(0)$.
Επομένως $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h^2) - f(0)}{h^2} \cdot h = f'(0) \cdot 0 = 0$.

4. Αν $f(t+1) = f(t-1)$ τότε $\frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t-1)}{2t} = \frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t+1)}{2t} = f(t+1)$ και αρκεί σαν $x_0$ να πάρουμε το $t+1$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f(t+1) \neq f(t-1)$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $r(x) = f(x) - \frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t-1)}{2t}$. Τότε
$r(t-1) = \frac{1}{2}(t+1)\frac{f(t-1)-f(t+1)}{t}$
$r(t+1) = -\frac{1}{2}(t-1)\frac{f(t-1)-f(t+1)}{t}$
και επομένως
$r(t-1)r(t+1) =$
$-\frac{1}{4t^2}(t+1)(t-1)\left(f(t-1) - f(t+1)\right)^2 < 0$
και από το θεώρημα του Bolzano η $r$ (άρα και η δοθείσα εξίσωση) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(t-1, t+1)$.

## ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x$ ισχύει:

- $f(x) \geq 0$
- $(f \circ f)(x) = \left(x^2 + x + 1\right)f(x)$
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5 Μονάδες

2. Να αποδείξετες ότι η $f$ είναι 1-1.

5 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

5 Μονάδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x$ είναι $4f(f(x)) \geq 3f(x)$.

5 Μονάδες

5. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $\ell$.

5 Μονάδες

### Απαντησεις

1. Υποθέτουμε ότι $f(x_0) = 0$. Τότε $f(f(x_0)) = f(0)$. Θέτοντας στην δοθείσα σχέση όπου $x$ το $x_0$ βρίσκουμε:
$f(0) = \left(x_0^2 + x_0 + 1\right)f(x_0)$ καιεπομένως $f(0) = 0$. Αλλά η εξίσωση $f(x) = 0$ μοναδική ρίζα. Άρα $x_0 = 0$ και η μοναδική λύση της $f(x) = 0$ είναι ο 0.

2. Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Αλλά από την υπόθεση είναι:
$f(x_1) = \left(x_1^2 + x_1 + 1\right)f(x_1)$ και
$f(x_2) = \left(x_2^2 + x_2 + 1\right)f(x_2)$ και επομένως θα είναι
Αν μεν $f(x_1) = f(x_2) = 0$ τότε αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση θα είναι $x_1 = x_2$. Αν είναι $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$ τότε απλοποιώντας βρίσκουμε $x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$. Μεταφέροντας στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιώντας βρίσκουμε ότι $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - x_2) = 0$. Αλλά είναι $x_1 + x_2 + 1 > 0$ άρα $x_1 - x_2 = 0$ και πάλι $x_1 = x_2$. Επομένως η $f$ είναι 1-1.

3. Είναι $f(x) \geq 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \neq f(0) = 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

4. Θέλουμε $4f(f(x)) \geq 3f(x)$ δηλαδή
$4\left(x^2 + x + 1\right)f(x) \geq 3f(x)$ Η παραπάνω σχέση για $x = 0$ ισχύει σαν ισότητα ενώ για $x > 0$ απλοποιώντας το $f(x) > 0$ έχουμε την ισοδύναμη σχέση $4\left(x^2 + x + 1\right) \geq 3$ που ισοδυναμει με την $(2x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

5. Αφού είναι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$ θα ισχύει
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} =_{u=f(x)} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(u)}{u} = \ell$
Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + x + 1\right) = 1$ επομένως $\ell = 1$.

## ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις

$h(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ και $\quad f(x) = \begin{cases} 3 - x - xh(x) & , \quad x \neq 0 \\ 3 & , \quad x = 0 \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι

   (α′) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ (β′) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1$

6 Μονάδες

2. Να βρείτε τα όρια:

   (α′) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (β′) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

4 Μονάδες

3. Να βρείτε την παράγωγο της $f$.

5 Μονάδες

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$.

5 Μονάδες

5. Έστω $(\varepsilon)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $\mathcal{C}_f$ της $f$ στο σημείο της $A(0,3)$ και $M(\alpha, f(a))$ ένα οποιοδήποτε κοινό σημείο της $\mathcal{C}_f$ και της $(\varepsilon)$. Να αποδείξετε ότι
$$|\alpha| \le \frac{1}{\pi}$$

5 Μοναδες

Απαντησεις

## ΖΗΤΗΜΑ 4

1. (α΄) Για $x \ne 0$ είναι $|h(x)| = \left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$ και επομένως $|h(x)| \le |x|$ δηλαδή $-|x| \le h(x) \le |x|$. Αφού $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

   (β΄) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =_{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$

2. (α΄) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3 - x - xh(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x} - 1 - h(x)\right) = -\infty$

   (β΄) Εργαζόμενοι όπως πριν και όπως στο ερώτημα 1β βρίσκουμε ότι το όριο είναι $+\infty$.

3. Για $x \ne 0$ είναι $f'(x) = \left(3 - x - x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)' = \ldots = 1 - 2x\eta\mu\frac{1}{x} + \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.
   Για $x = 0$ είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3-x-xh(x)-3}{x} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x-xh(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-1 - h(x)) = -1$. Τελικά:
$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x\eta\mu\frac{1}{x} + \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & , \quad x \ne 0 \\ -1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

4. Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y) = +\infty$ και επομένως υπάρχει $x_1$ ώστε $f(x_1) > 0$.Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = -\infty$ και επομένως υπάρχει $x_2$ ώστε $f(x_2) < 0$. Ασφαλώς θα είναι $x_1 \ne x_2$ οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα με άκρα $x_1, x_2$ για την συνεχή συνάρτηση $g$ βρίσκουμε ότι υπάρχει $x$ μεταξύ των $x_1 \ne x_2$ ώστε $f(x) = y$. Επομένως το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $\mathbb{R}$.

5. Είναι $f'(-1) = 0$ και επομένως η εξίσωση εφαπτομένηση της $\mathcal{C}_f$ στο Α είναι η $y = -x + 3$. Λύνοντας το σύστημα
$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 3 \\ y = f(x) \end{array}\right\}$$
   βρίσκουμε ότι οι τετμημένες των κοινών στημείων των $(\varepsilon)$, $\mathcal{C}_f$ είναι λύσεις της εξίσωσης
   $x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$ και επομένως το $\alpha$

   - ή θα είναι μηδέν οπότε προφανώς $|\alpha| \le \frac{1}{\pi}$
   - είτε θα είναι λύση της $\eta\mu\frac{1}{x} = 0$ δηλαδή $\alpha = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}^*$ και τότε $|\alpha| = \left|\frac{1}{k\pi}\right| = \frac{1}{|k|}\frac{1}{\pi} \le \frac{1}{\pi}$.