Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
11 ΑΠριλίου 2011

Διδάσκοντες:
Σπυρίδων Αμούργης, Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

   7 Μοναδες

2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα-κυρτά και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

   7 Μοναδες

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

   7 Μοναδες

4. Να βρείτε για ποιά x ισχύει $f(f(x))=x$.

   4 Μοναδες

Απαντησεις

1. Είναι $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$. Η f είναι συνεχής και η παράγωγος της είναι θετική σε κάθε $x\neq 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Είναι $f''(x)=\frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ και

   - $f''(x)>0$ στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right),\left(0,\sqrt{3}\right)$ στα οποία η f είναι κυρτή.
   - $f''(x)<0$ στα διαστήματα $\left(-\sqrt{3},0\right),(0,+\infty)$ στα οποία η f είναι κοίλη.
   - Είναι $f''(x)=0$ όταν $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ και εκατέρωθεν των σημείων αυτών η f αλλάζει είδος κυρτότητας απομένως τα σημεία $(0,f(0))=(0,0)$, $\left(\sqrt{3},f\left(\sqrt{3}\right)\right)=\left(\sqrt{3},\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ και $\left(-\sqrt{3},f\left(-\sqrt{3}\right)\right)=\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ είναι σημεία καμπής της f

3. Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ και επομένως σεν έχει κατακόρυφες ασύμπτώτους.
   Είναι

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

   και

   $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=0$$

   επομένως η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$ στο $+\infty$.
   Όμοια βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$ στο $-\infty$.

4. Ζητάμε τα x για τα οποία είναι

   $$f(f(x))=x$$

   Για ένα τέτοιο x αποκλείεται να είναι $f(x)<x$ διότι από την μονοτονία της f θα ήταν $f(f(x))<f(x)$ και τότε $f(f(x))<x$. Όμοια αποκλειεται να είναι $f(x)>x$ διότι τότε $f(f(x))>f(x)>x$ (άτοπο). Επομένως θα είναι $f(x)=x$ δηλαδή $\frac{x^3}{x^2+1}=x$. Η εξίσωση έχει λύση το $x=0$ και καμμία μη μηδενική διότι με $x\neq 0$ η εξίσωση ανάγεται στην $\frac{x^2}{x^2+1}=1$ που είναι αδύνατη. Άρα τελικά $x=0$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Έστω
$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

9 Μοναδες

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9 Μοναδες

3. Να βρείτε τον $a > 0$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο αριθμός
$$a^t - t$$
ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

7 Μοναδες

Απαντησεις

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και
$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{2x - 2 + \ln x}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$$
Το πρόσημο της f' εξαρτάται είναι ίδιο με το πρόσημο της $h(x) = 2x - 2 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ η οποία έχει προφανή ρίζα 1 και παράγωγο $h'(x) = \frac{2x+1}{x} > 0$. Επομένως η h (άρα και η f' είναι
   - Αρνητική στο $(0, 1)$
   - Μηδέν στο $x = 1$
   - Θετική στο $(1, +\infty)$

   άρα η f είναι
   - Γνησιως φθίνουσα στο $(0, 1)$
   - Γνησιως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

2. Το σύνολο τιμών της f είναι
$$[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)) \cup [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x))$$
και αφου
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x} - \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$ και
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$
αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
Επομένως το σύνολοτιμών της f είναι $[1, +\infty) \cup [1, +\infty) = [1, +\infty)$.

3. Για να ανήκει ο $a^t - t$ στο σύνολο τιμών της f γιά όλα τα t πρέπει $a^t - t \geq 1$ γιά κάθε t. Δηλαδή θέλουμε για την συνάρτηση $r(t) = a^t - t$, $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει $r(t) \geq 1$ για κάθε t. Αλλά $1 = r(0)$ επομένως θέλουμε $r(t) \geq r(0)$ για κάθε t. Πρέπει η r παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα από το θεώρημα του Fermat πρέπει να ισχύει $r'(0) = 0$. Αλλά $r'(t) = a^t \ln a - 1$ άρα πρέπει $a^0 \ln a - 1 = 0$ δηλαδή $a = e$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{1}{e}x + e(1 - x) - e^{1-2x}$$

1. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

5 Μοναδες

3. Να βρείτε το πρόσημο της f.

5 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.

5 Μοναδες

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τον $x'x$.

5 Μοναδες

Απαντησεις

1. Είναι $f'(x) = \left(1 - e^2 + 2e^{2-2x}\right)e^{-1}$ και επομένως
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$1 - e^2 + 2e^{2-2x} = 0 \Leftrightarrow$
$x = 1 - \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2\right)$

2. Οι αριθμοί 0 και 1 προφανώς είναι ρίζες της f. Είδαμε ότι η παράγωγος της f έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $x = 1 - \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2\right)$. Αν η f είχε και άλλη ρίζα εκτός από τις 0 και 1 τότε θα είχε τρεις τουλάχιστον ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ (δύο από αυτές οι 0,1). Τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ συμπεραίνουμε ότι η f' θα έπρεπε να έχει τουλάχιστον δύο ρίζες μία σε κάθε ένα από τα (ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3) (άτοπο). Αρά οι ρίζες 0 και 1 είναι μοναδικές.

3. Η f' έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $\rho = 1 - \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2\right)$ και επομένως σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,\rho),(\rho,+\infty)$ δεν έχει ρίζα άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αλλά $f'(0) = \frac{1+e^2}{e} > 0$ και $f'(1) = \frac{3-e^2}{e} < 0$ επομένως αναγκαστικά είναι $0 < \rho < 1$ και

   - $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,\rho)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\rho]$
   - $f'(x) < 0$ στο $(\rho,+\infty)$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\rho,+\infty)$

   Τώρα

   - αν $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$
   - αν $0 < x < \rho$ είναι $0 = f(0) < f(x)$
   - αν $\rho < x < 1$ είναι $f(x) > f(1) > 0$
   - αν $1 < x$ είναι $f(x) < f(1) = 0$

   Τελικά η f είναι αρνητική στα $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$ και θετική στο $(0,1)$.

4. Από την μεταβολή της μονοτονίας της f που βρήκαμε προηγουμένως προκύπτει ότι η f έχει μέγιστο στο ρ.

5. Αφού η συνάρτηση μας είναι θετική στο $[0,1]$ που είναι το διάστημα των ριζών της το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 + e(1-x) - e^{1-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{e}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω παραγωγισιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(0) = 1$
- $f'(-x)\cdot f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι

   (α΄) $f'(0) = 0$

   (β΄) Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

   4+4 Μοναδες

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   4+4 Μοναδες

3. Έστω $h(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

   (α΄) Να βρείτε το $\int_0^1 h(x)\,dx$

   (β΄) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = h(2011)$

   6+3 Μοναδες

Απαντησεις

1. (α΄) Θέτοντας στην σχέση $f'(-x)\cdot f(x) = -x$ όπου x το 0 βρίσκουμε $f'(0)\cdot f(0) = 0$ δηλαδή $f'(0)\cdot 1 = 0$ οπότε $f'(0) = 0$.

   (β΄) Για $x \neq 0$ είναι $f'(-x)\cdot f(x) = -x \neq 0$ και επομένως $f(x) \neq 0$. Αλλά και $f(0) = 1 > 0$ επομένως η συνεχής συνάρτηση f δεν έχει ρίζα στο πεδίο ορισμούτης που είναι διάστημα, διατηρεί πρόσημο και αφού μία τιμή της είναι θετική το πρόσημο είναι θετικό.

2. (α΄) Είναι $g'(x) = \left(\frac{f(-x)}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(-x)f(x)-f'(x)f(-x)}{f^2(x)} = \frac{-(-x)-x}{f^2(x)} = 0$ και επομένως η g είναι σταθερή. Είναι δε $g(x) = g(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$

   (β΄) Είναι $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1$ οπότε $f(-x) = f(x)$ για κάθε x. Οπότε $-f'(-x) = f'(x)$. Από την $f'(-x)\cdot f(x) = -x$ έχουμε ότι $f'(x)f(x) = x$ δηλαδή $\left(f^2(x)\right)' = \left(x^2\right)'$. Άρα $f^2(x) = x^2 + c$ όπου θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε ότι

$$f^2(x) = x^2 + 1$$

   και αφού η f παίρνει μόνο θετικές τιμές συνάγουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

3. (α΄) Είναι $\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 (x)'\,h(x)\,dx = [xh(x)]_0^1 - \int_0^1 xh'(x)\,dx = 0 - 0 - \int_0^1 xf(x)\,dx = -\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx =_{x^2+1=u} -\int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$

   (β΄) Είναι $f'(x) = f(x) = \sqrt{x^2+1} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1. Άρα η εξίσωση $h(x) = h(2011)$ μας δίνει $x = 2011$.